GIORNALE DI FISICA VOL. LXI, N. 2 Aprile-Giugno 2020
DOI 10.1393/gdf/i2020-10371-x

# PER SAPERNE DI PIÙ

## Reversibilità e freccia del tempo
## Reversibility and time arrow

Antonio Coniglio

*CNR-SPIN Napoli e Università di Napoli "Federico II", Napoli, Italia*

**Riassunto.** I fenomeni che quotidianamente si presentano ai nostri occhi sono irreversibili, cioè vanno in una direzione del tempo ben precisa, corrispondente a quello che noi chiamiamo futuro. D'altra parte le leggi della meccanica, sia classica che quantistica, sono descritte da equazioni reversibili che non distinguono il passato dal futuro. Cercherò di mostrare come è possibile conciliare la freccia del tempo del mondo macroscopico con la reversibilità delle leggi della meccanica.

**Abstract.** The everyday experience shows that the phenomena around us are irreversible, *i.e.* they go towards a precise direction of time, corresponding to what we call future. On the other hand, both classical and quantum mechanics are described by reversible equations that do not distinguish the past from the future. I will try to show how it is possible to reconcile the time arrow in the macroscopic world, with the reversibility of the mechanical laws.

## 1. Introduzione

La maggior parte dei fenomeni naturali che osserviamo intorno a noi si svolgono in una direzione temporale ben precisa, nota come freccia del tempo [1]. La fuoriuscita di un gas da una bombola, un pezzo di ghiaccio che si scioglie nell'acqua, la rottura di un bicchiere che cade sul pavimento e va in frantumi, sono tutti esempi di fenomeni irreversibili, per non parlare dell'evento relativo all'invecchiamento con il drammatico passaggio dalla vita alla morte. Da qui nasce la percezione psicologica del tempo che scorre in una direzione ben precisa, orientata verso il futuro e il grande interesse filosofico, religioso, psicologico del significato profondo del tempo.

D'altra parte le leggi del moto sono reversibili, vale a dire sono invarianti per inversione temporale. Qui per semplicità consideriamo le leggi della meccanica classica, ma il discorso si estende anche alle leggi della meccanica quantistica. Cosa significa che le leggi che descrivono il moto delle particelle sono invarianti per inversione temporale? Se nelle equazioni del moto cambiamo la variabile tempo $t$ in $t' = -t$ le leggi del moto non cambiano. Questo implica che se un sistema di particelle, seguendo le equazioni del moto, si evolve nel tempo, seguendo determinate traiettorie, le stesse traiettorie percorse al contrario, invertendo il tempo, soddisfano egualmente le leggi del moto e quindi sono altrettanto possibili. La conclusione sarebbe che non è possibile stabilire se si sta andando nella direzione positiva del tempo (verso il futuro) o nella direzione negativa (verso il passato).

Per rendere l' idea della reversibilità o meno di un fenomeno, si può immaginare di riprendere un film di un evento e proiettarlo avendo invertito il moto della pellicola. Ad esempio se si riprende il moto di un satellite intorno alla terra o il moto di un pendolo che oscilla nel vuoto in assenza totale di attrito e si proietta il film ad un qualunque osservatore nel verso giusto e nel verso opposto, avendo invertito il moto della pellicola, tale osservatore non sarà in grado di stabilire quale è il senso giusto e quale quello invertito. Se viceversa si usa lo stesso procedimento per altri fenomeni più complessi quale la rottura di un bicchiere, che cade sul pavimento e va in frantumi, qualsiasi osservatore si renderà conto se il film è proiettato nel senso giusto o nel senso invertito. Alcuni fenomeni sembrano reversibili, la maggior parte invece sono chiaramente irreversibili. Come spiegare questa apparente contraddizione fra l'irreversibilità dei fenomeni macroscopici e la reversibilità insita nelle leggi microscopiche della dinamica, e come mai alcuni fenomeni invece sembrano soddisfare alla proprietà di reversibilità.

Anticipiamo che la risposta si fonda su un concetto probabilistico. Vale a dire che i fenomeni macroscopici, in linea di principio, possono ripercorrere gli stati microscopici, che si ottengono per inversione temporale, non essendo questi processi contrari alle leggi della dinamica. Ma questi fenomeni, come vedremo, hanno una probabilità estremamente bassa di verificarsi. Per illustrare questo concetto, considereremo nella prossima Sezione un semplice esempio, che contiene gli ingredienti essenziali, che, come vedremo, valgono in generale in situazioni anche più complesse.

## 2. Distribuzione di particelle in una scatola

Si consideri una scatola con $N$ particelle debolmente interagenti, divisa in due parti eguali. Supponiamo il sistema in equilibrio e si immagini un esperimento ideale, in cui si prendono un gran numero di foto consecutive in un intervallo di tempo $\tau$. Ciascuna foto rappresenta una configurazione microscopica. Una grandezza macroscopica, associata al sistema, è il numero di particelle a sinistra della scatola. Se vogliamo fare una predizione di quale sia la distribuzione di tale grandezza, l'approccio della meccanica classica sarebbe di risolvere le equazioni del moto, data l'energia di interazione fra le particelle e date le condizioni iniziali di posizione e velocità delle particelle. Una volta calcolate le coordinate delle particelle in funzione del tempo, si procede al calcolo della distribuzione del numero delle particelle nella parte sinistra della scatola. Ovviamente la soluzione di questo problema, per un numero di particelle macroscopico, è praticamente impossibile da ottenere. La meccanica statistica affronta il problema in maniera molto più semplice, usando un approccio probabilistico. Si assume che la probabilità che una data particella sia a sinistra, sia data da $p = 1/2$ e a destra da $q = 1 - p = 1/2$, data la simmetria fra sinistra e destra.

TABELLA I. – 4 *configurazioni di 2 particelle a e b in una scatola divisa idealmente in due parti eguali.*

| sinistra | destra |
|---|---|
| $a$, $b$ | |
| $a$ | $b$ |
| $b$ | $a$ |
| | $a$, $b$ |

Assumendo le particelle distinguibili, una data configurazione è caratterizzata dall'indicazione di quale particella è a sinistra e quale a destra. Per esempio 1 particella ha 2 possibili configurazioni, mentre 2 particelle hanno 4 possibili configurazioni (vedi tabella I). Dato che le particelle sono debolmente interagenti, possiamo assumere che la probabilità, per una data configurazione di due particelle sia data dal prodotto delle probabilità delle configurazioni delle singole particelle. Ciascuna configurazione microscopica, nel caso di due particelle, ha quindi la stessa probabilità di realizzarsi: 1/4. Se però consideriamo l'evento in cui una particelle sia a sinistra e una a destra $p(1,1)$, abbiamo

$$p(1,1) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,,$$

dato che 2 è il numero di configurazioni che realizza quell'evento. In generale se abbiamo $N$ particelle distinguibili, la probabilità di trovare $n_1$ particelle a sinistra e $n_2 = N - n_1$ particelle a destra è data da

$$P_N(n_1) = C_N(n_1) p^{n_1} q^{n_2},$$

dove

$$C_N(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}$$

è la degenerazione, cioè il numeero di configurazioni microscopiche che realizza l'evento macroscopico di $n_1$ particelle a sinistra e $N - n_1$ particelle a destra. Nel caso che stiamo considerando, in cui la scatola è divisa in due parti eguali, $p = q = \frac{1}{2}$ e quindi ciascuna configurazione microscopica ha lo stesso peso $1/2^N$. Il concetto importante da sottolineare qui, è che ciò che rende una stato macroscopico più o meno probabile è la degenerazione, cioè il numero di configurazioni microscopiche che realizzano lo stato macroscopico. Per grandi valori di $n_1$, $n_2$ ed $N$, usando l'approssimazione di Stirling per i fattoriali e sviluppando $\ln P_N(n_1)$ intorno al suo valore massimo $n_1 = N/2$ si ottiene una distribuzione Gaussiana [2]

$$P_N(n_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left[-\frac{2}{N}(n_1 - \overline{n_1})^2\right],$$

con $\overline{n_1} = N/2$.

È conveniente introdurre la variabile intensiva $x = n_1/N$, e la distribuzione di probabilità $\mathcal{P}_N(x)\mathrm{d}x$, che rappresenta la probabilità di trovare una frazione di particelle a sinistra della scatola compresa fra $x$ e $x + \mathrm{d}x$. Tenendo conto che $\Delta x = \Delta n_1/N$ con $\Delta n_1 = 1$, $\Delta x$ è un infinitesimo nel limite in cui $N$ tende all'infinito e dalla relazione

$$P_N(n_1)\Delta n_1 = \mathcal{P}_N(x)\Delta x$$

si ha

$$\mathcal{P}_N(x) = \sqrt{\frac{2N}{\pi}} \exp\big[-2N(x-1/2)^2\big]. \tag{1}$$

Questa è una distribuzione Gaussiana centrata intorno la suo valore più probabile $x = 1/2$, con una fluttuazione dell'ordine di $N^{-1/2}$. Questo implica che il valore tipico della frazione di particelle a sinistra della scatola è dato da

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{N}} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{N}}\,. \tag{2}$$

Si noti che, nel limite in cui $N$ tende all'infinito, le fluttuazioni tendono a zero e l'unico valore che si realizza è dato dal suo valore più probabile, come si evince anche dal fatto che la distribuzione di probabilità eq. (1) tende ad una funzione delta, centrata sul suo valore più probabile.

La distribuzione (1) è valida quando il sistema è in equilibrio. Cosa ci si aspetta se invece il sistema è in uno stato lontano dall'equilibrio? Supponiamo ad esempio di preparare il sistema in uno stato in cui tutte le particelle sono confinate a sinistra della scatola, tramite l'ausilio di una barriera. Se ad un tempo iniziale $t = 0$ eliminiamo il vincolo della barriera, lo stato del sistema inizialmente caratterizzato da un valore medio di $x = 1$ evolverà fino a raggiungere l'equilibrio, caratterizzato dallo stato più probabile con valore medio di $x = 1/2$. Una volta raggiunto questo stato, non c'è nessun motivo, basato sulla meccanica classica, che impedisca al sistema di ritornare nello stato iniziale con valore $x = 1$. D'altra parte lo stato in cui tutte le particelle sono a sinistra è realizzato da una sola configurazione, per cui la probabilità che questo stato si verifichi, come illustrato precedentemente, è dato da $1/2^N$. Se $N$ è dell'ordine di $10^{24}$ il valore di tale probabilità è praticamente 0. A nessuno è mai capitato infatti, trovandosi nel lato destro di una stanza, di sentirsi mancare il respiro perchè tutte le molecole dell'aria si sono spostate nel lato sinistro. Ecco l'origine della irreversibilità e come emerga naturalmente una chiara direzione temporale, in cui le particelle tendono a diffondere in tutto lo spazio disponibile, fino a raggiungere lo stato più probabile. Se d'altra parte nella scatola si ha una sola particella ($N = 1$), la particella ha una probabilità $1/2$ di trovarsi a sinistra, quindi passa con la stessa frequenza da destra a sinistra indifferentemente. In questo caso il fenomeno appare come reversibile senza possibilità di distinguere fra passato e futuro.

Cosa impariamo da questo semplice esempio? 1) È possibile predire le proprietà macroscopiche di un sistema, senza necessariamente seguire il moto di tutte le singole particelle. Questo approccio si basa su di una descrizione probabilistica e si fonda su un'assunzione ragionevole circa l'eguale probabilità *a priori*. Le quantità calcolate con le distribuzioni di probabilità devono essere paragonate con le medie temporali fatte sperimentalmente sul sistema. La verifica sistematica delle previsioni giustifica la validità del postulato di partenza. Nel limite di grandi valori del numero $N$ di particelle, la distribuzione delle grandezze macroscopiche tende ad una distribuzione Gaussiana intorno al valore medio. Lo stato caratterizzato da questo valore più probabile è estremamente degenere ed è realizzato da una frazione di stati microscopici che tende ad 1 nel limite $N \to \infty$. Tutti gli altri stati macroscopici in questo limite hanno probabilità zero di verificarsi. Quindi se indichiamo con $\Omega = 2^N$ il numero totale di configurazioni microscopiche, si ha che $\ln \Omega / N$ è una grandezza intensiva.

Nella prossima sezione, sulla base delle considerazioni esposte precedentemente, accenneremo alla formalizzazione dei concetti di base, su cui si fonda sostanzialmente l'approccio della meccanica statistica.

## 3. Entropia

Consideriamo un sistema tridimensionale isolato fatto di $N$ particelle, con un'energia fissata $E$ e volume $V$ che obbedisce alle leggi della meccanica classica. Lo stato microscopico è caratterizzato dalle coordinate $q_1, \dots, q_{3N}$ e i suoi momenti coniugati $p_1, \dots, p_{3N}$. L'evoluzione del sistema si ottiene risolvendo le equazioni del moto. Fissate le condizioni iniziali delle coordinate e dei suoi momenti coniugati, esiste un'unica soluzione che dà in maniera deterministica le $6N$ coordinate in funzione del tempo, sia nel passato che nel futuro. Qualunque grandezza macroscopica osservabile si ottiene mediando su un congruo intervallo di tempo. Come accennato nella sezione precedente, la meccanica statistica rinuncia a questa descrizione microscopica dettagliata, sostituendo la media temporale con una media di "insieme", dove l'insieme è costituito da $M$ copie macroscopicamente identiche al sistema dato, cioè con la stessa energia $E$, volume $V$ e numero di particelle $N$. Ognuna di queste copie si trova in uno stato microscopico determinato. Per caratterizzare l'insieme statistico e calcolare le medie di insieme, è necessario stabilire la distribuzione dell'insieme su tutti gli stati microscopici. L'ipotesi fondamentale è che, per un sistema all'equilibrio questa distribuzione è uniformemente distribuita su tutte gli stati microscopici accessibili. Questa ipotesi è conosciuta come ipotesi di eguale *a priori* probabilità. Vale a dire si fa l'ipotesi che, dato un sistema isolato, c'è un eguale probabilità di trovare il sistema in ognuno delle sue configurazioni accessibili. Indichiamo con $\Omega$ il numero di configurazioni accessibili al sistema. Se $\Omega$ è piccolo, ad esempio è uno, il sistema si trova in uno stato microscopico ben preciso, noi conosciamo esattamente in quale stato microscopico si trova. Se d'altra parte $\Omega$ è grande, la nostra ignoranza di quale sia lo stato microscopico in cui il sistema si trova è anche grande. Questa degenerazione di stati, che in qualche modo dà una misura sulla conoscenza che si ha del sistema, caratterizza il sistema macroscopico ed è un concetto molto importante che ora andiamo ad analizzare.

Consideriamo due sistemi $A$ e $A'$ in contatto, ma separati da una barriera che non permette lo scambio di energia. Se $E_i$ ed $E'_i$ sono, rispettivamente, le energie del sistema $A$ e $A'$, il numero totale di configurazioni $\Omega_i^0$ sarà dato da

$$\Omega_i^0 = \Omega_i(E_i)\Omega'_i(E'_i), \tag{3}$$

dove $\Omega_i(E_i)$ ed $\Omega'_i(E'_i)$ sono, rispettivamente, il numero di configurazioni relativo al sistema $A$ compatibile con l'energia $E_i$ e al sistema $A'$, compatibile con l'energia $E'_i$. Cosa succede se si rimuove la barriera permettendo così lo scambio di energia fra i due sistemi, tenendo tutti i parametri esterni fissati? In questa nuova situazione tutte le configurazioni che erano permesse prima, saranno ancora permesse. Ma ora che i sistemi $A$ ed $A'$ possono scambiare energia il sistema composto $A + A'$ può anche trovarsi in altri stati, purchè l'energia totale del sistema $E + E' = E_{\rm tot}$ sia mantenuta costante. Se indichiamo con $\Omega_f^0$ il numero di stati microscopici accessibili al sistema totale, senza il vincolo dovuto alla barriera, avremo

$$\Omega_f^0 \geq \Omega_i^0. \tag{4}$$

Immediatamente dopo aver rimosso la barriera il sistema non è egualmente distribuito fra tutti gli $\Omega_f^0$ stati microscopici ma occuperà solo una frazione $\Omega_i^0/\Omega_f^0$. Esso allora evolverà verso uno stato macroscopico di equilibrio in cui tutti gli $\Omega_f^0$ stati microscopici accessibili sono egualmente probabili.

Una volta che il sistema totale ha raggiunto l'equilibrio qual'è la distribuzione di probabilità $P(E)$ di trovare il sottosistema $A$ con energia $E$? Dato che ogni configurazione accessibile al sistema totale $A + A'$ è ugualmente probabile, $P(E)$ è dato dal numero di configurazioni che realizzano lo stato in cui il sottosistema $A$ ha un'energia $E$ ed il sottosistema $A'$ un'energia $E_{\rm tot} - E$, cioè

$$P(E) = C\Omega(E)\Omega'(E'), \tag{5}$$

dove $C$ è un fattore di normalizzazione dato dall'inverso del numero delle configurazioni totale. Senza entrare nei dettagli, si può mostrare che la $P(E)$ è una funzione, che presenta un massimo intorno al valore più probabile $\bar{E}$. Espandendo $\ln P(E)$ intorno al massimo, come nell'esempio delle particelle nella scatola, si dimostra che $P(E)$ è una Gaussiana e se si considera la distribuzione di probabilità $\mathcal{P}(e)$ nella densità di energia $e = E/N$, tale distribuzione, nel limite in cui il numero di particelle $N$ tende all'infinito, tende ad una funzione delta, centrata intorno al valore più probabile [2]. Per trovare questo massimo è conveniente trovare il massimo del $\ln P(E)$ che si ottiene imponendo

$$\frac{\partial \ln P(E)}{\partial E} = 0. \tag{6}$$

Tenendo conto che $\frac{\partial E'}{\partial E} = -1$ dall'eq. (5) si ottiene

$$\frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E} = \frac{\partial \ln \Omega'(E')}{\partial E'}\,. \tag{7}$$

Se inoltre definiamo

$$\beta(E) \equiv \frac{\partial \ln \Omega(E)}{\partial E}\,, \tag{8}$$

la relazione che determina il valore $\bar{E}$ per cui $P(E)$ ha un massimo, e che esprime la condizione di equilibrio (7), si può scrivere in maniera più compatta

$$\beta(E) = \beta'(E'). \tag{9}$$

È possibile mostrare che nel limite di $N$ molto grande, la grandezza

$$S = k_{\mathrm{B}} \ln \Omega \tag{10}$$

dove $k_{\mathrm{B}}$ è la costante di Boltzmann, coincide con l'entropia definita termodinamicamente, mentre

$$\beta^{-1} = k_{\mathrm{B}} T \tag{11}$$

è proporzionale alla temperatura termodinamica assoluta $T$, dove la costante di proporzionalità è data dalla costante di Boltzmann. Senza entrare nei dettagli della dimostrazione, notiamo che $k_{\mathrm{B}} \ln \Omega$ possiede le proprietà dell'entropia termodinamica. Infatti dalla eq. (5) si evince che l'entropia definita statisticamente è additiva. Inoltre due sistemi, in contatto termico inizialmente non in equilibrio, evolvono fino a raggiungere uno stato di equilibrio corrispondente al massimo dell'entropia, come per l'entropia termodinamica. Con l'identificazione dell'entropia definita statisticamente eq. (10) e l'entropia definita termodinamicamente si ha un'interpretazione probabilistica della crescita dell'entropia termodinamica. Allo stesso modo si ha una comprensione più profonda di una delle formulazioni più semplici del secondo principio della termodinamica, dovuta a Clausius, basata su esperienza comune. Secondo questa formulazione è impossibile realizzare una trasformazione termodinamica, in cui il calore venga trasferito "spontaneamente" da un sistema a bassa temperatura ad un sistema a temperatura più elevata, senza che venga fatto lavoro sul sistema. Infatti in base alla formulazione statistica, se due sistemi isolati in equilibrio, caratterizzati da due diversi valori di $\beta$, sono messi in contatto termico (in modo da poter scambiare energia senza compiere lavoro), non saranno più in equilibrio e si scambieranno energia termica, fino a raggiungere lo stesso valore di $\beta$ eq. (9), che corrisponde al raggiungimento dello stato macroscopico più probabile. Quindi lo scambio di calore fra un sitema più caldo ad uno più freddo, fino al raggiungimento della stessa tempeatura, è dovuto al fatto che il sistema evolve verso lo stato più probabile.

## 4. La freccia del tempo è reale o è solo un'illusione?

Alcuni hanno obiettato che la freccia del tempo, legata alle trasformazioni spontanee, che vanno da uno stato meno probabile ad uno stato più probabile, in realtà è solo un'illusione, dovuta alla nostra ignoranza sul sistema macroscopico. Infatti in base alle leggi della dinamica, come abbiamo avuto modo di dire, in un sistema isolato, una volta che sono fissate le condizioni iniziali il sistema segue una traiettoria deterministica ben precisa, caratterizzate dalle $6N$ coordinate del sistema sia nel futuro che nel passato. Quindi la grandezza $\Omega$ corrispondente al numero di configurazioni microscopiche che realizzano le condizioni macroscopiche del sistema in realtà è solo una misura della nostra ignoranza sul sistema, dato che il sistema si trova comunque in un'unica configurazione microscopica. Come rispondere a questa obiezione? Il punto è che ci sono diversi livelli di descrizione della realtà. Quella microscopica descritta dalle leggi della meccanica e quella macroscopica descritta dalle leggi della termodinamica. Entrambe valide nell'ambito della propria descrizione. Nell'esempio delle particelle nella scatola, quando lo stato iniziale è preparato in modo tale da avere tutte le particelle a sinistra della scatola, la meccanica classica prevede che l'energia totale resti costante nel tempo. La termodinamica introduce un'altra grandezza, l'entropia, prevedendo che essa cresca fino al raggiungimento di un massimo, corrispondente ad uno stato stazionario. Pertanto non si verificherà mai, che tutte le particelle si sposteranno a sinistra della scatola, o per essere più precisi, ci sarà una probabilità bassissima che questo si verifichi, che praticamente è zero per $N$ grande. Allo stesso modo non si verificherà mai che il calore passi spontaneamente da un corpo più freddo ad uno più caldo. Tutto ciò è supportato da evidenze sperimentali inoppugnabili e non è un'illusione dovuta alla nostra ignoranza su quale sia lo stato microscopico in cui si trova il sistema.

Per molto tempo in fisica si è affermata una corrente di pensiero che va sotto il nome di riduzionismo. I fautori di questo approccio immaginano che tutto sia riconducibile ad un unico concetto, ad un'unica equazione da cui scaturisce la comprensione di tutto il mondo osservabile. Questa concezione è ben lontana dalla realtà. Come ben elaborato in un famoso articolo di P. W. Anderson [3], intitolato *more is different*, la natura appare strutturata in vari livelli, in cui ogni livello è costituito da elementi del livello precedente, dalla cui unione emergono fenomeni nuovi, non contenuti nella somma dei singoli costituenti. Si pensi agli atomi, molecole, macromolecole, proteine, semplici organismi biologici fino ad arrivare alla complessità degli esseri umani. È chiaro che ci sono vari livelli di conoscenza, ognuno dei quali necessita di concetti nuovi per comprendere fenomeni pertinenti al proprio ambito.

Nella sezione successiva descriveremo brevemente l'elaborazione, sviluppata principalmente da Boltzmann, per descrivere il passaggio dal livello microscopico a quello macroscopico.

## 5. L'equazione Boltzmann ed il teoema $H$

Boltzmann portò avanti un difficile progetto che consisteva nel derivare il comportamento statistico di molte particelle partendo dalle leggi della meccanica classica. Il sistema che viene considerato è un gas di particelle a bassa densità. Si introduce quindi una funzione di distribuzione per una particella $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, dove $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{p}$

rappresenta la probabilità di trovare una particella al tempo $t$ nel volumetto d$\mathbf{r}$ intorno alla posizione $\mathbf{r}$ e con impulso in un intervallo d$\mathbf{p}$ intorno a $\mathbf{p}$. Boltzmann riuscì a scrivere un'equazione per $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, nota come equazione di Boltzmann, la cui derivazione qui non riportiamo perchè troppo tecnica. Ci limitiamo a dire che questa equazione contiene la derivata prima rispetto al tempo di $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, e che, nel caso stazionario $\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)/\partial t = 0$, la soluzione riproduce il comportamento previsto dalla meccanica statistica di equilibrio [4].

Una conseguenza diretta di questa equazione è il famoso teorema $H$ di Boltzmann. Se definiamo $H$ come

$$H = \int \mathrm{d}\mathbf{r}\, \mathrm{d}\mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \ln f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \tag{12}$$

è possibile dimostrare che la funzione $S = -k_{\mathrm{B}} H$ coincide con l'entropia, e che se $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ soddisfa all'equazione di Boltzmann, questa funzione è una funzione crescente del tempo, fino a raggiungere il suo valore massimo nello stato di equilibrio, dopodiche resta costante. Ovviamente a causa del segno meno $H$ è una funzione decrescente fino a diventare costante. All'inizio il risultato ottenuto da Boltzmann fu considerato una dimostrazione della seconda legge della termodinamica a partire dalle leggi microscopiche della meccanica classica. Ma, immediatamente dopo la divulgazione, ci fu un grande dibattito circa la validità di questi risultati. Furono in particolare sollevate due principali obiezioni. La prima dovuta a Loschmidt riguardava l'equazione di Boltzmann. Questa equazione non è invariante per inversione temporale, contenendo solo la derivata prima rispetto al tempo. Come è possibile aver ottenuto tale equazione a partire dalle equazioni della dinamica, che sono invece invarianti per inversione temporale? La seconda obiezione dovuta essenzialmente a Zermelo riguarda la proprietà della funzione $H$ ed è basata sulla ricorrenza del ciclo di Poincarè. Poincarè aveva dimostrato che in un sistema isolato, data una configurazione iniziale ed un suo intorno comunque piccolo, esiste un intervallo di tempo sufficientemente grande ma finito, in cui lo stato del sistema attraversa questo intorno, ritornando quindi estremamente vicino allo stato iniziale. Pertanto la funzione $H$, se deriva dalle leggi della meccanica classica, non può sempre decrescere dovendo assumere, anche se dopo tempi lunghi, valori molto vicino a quello iniziale.

Queste obiezioni spinsero Boltzmann [5] ed i suoi sostenitori ad analizzare le condizioni di validità dell'equazione. Venne pertanto chiarito che l'equazione era basata su ipotesi probabilistiche. Pertanto la funzione di distribuzione $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, soluzione dell'equazione, teneva conto solo degli eventi più probabili. Di conseguenza l'andamento della funzione $H$, nella sua evoluzione temporale, escludeva sia le piccole fluttuazioni fisiologiche, che rientravano nell'intervallo del rumore, sia situazioni patologiche estremamente improbabili, che portavano per esempio il sistema da uno stato di equilibrio ad uno fuori dall'equilibrio. Tenendo conto di queste considerazioni si comprende come l'andamento di $H$ non risulta più in contraddizione con le leggi della dinamica classica. Si consideri ad esempio il sistema di particelle del gas in una scatola, inizialmente confinato nella parte sinistra. Questo stato corrisponde ad un alto valore di $H$. Come il sistema evolve, la parte destra comincia ad essere occupata, fino a che le particelle sono uniformemente distribuite, con la conseguente diminuzione di $H$. La meccanica classica stabilisce che se ad un dato tempo $t_0$ si invertono le velocità di tutte le particelle, allora il sistema evolve all'indietro e tutte le particelle ritorneranno nella parte sinistra della scatola, procurando una crescita di $H$ definita dall'eq. (12), in contraddizione con il teorema $H$. Il punto è che lo stato preparato al tempo $t_0$, invertendo tutte le velocità, è uno stato estremamente improbabile, così come sono estremamente improbabili tutti gli stati microscopici, che riportano comunque il sistema di particelle a sinistra della scatola. Tutti questi eventi sono così improbabili che in pratica non si realizzano mai, e quindi è altrettanto improbabile che la funzione $H$ possa crescere tanto, come prevede infatti il teorema $H$, dato che la soluzione dell'equazione di Boltzmann esclude questi eventi così improbabili.

La seconda obiezione, relativa al teorema di Poincarè, è facilmente confutabile alla luce di quanto detto sopra. Infatti per un sistema di $N$ particelle il tempo di ricorrenza $\tau$ è dell'ordine di $e^N$. Pertanto è necessario aspettare un lasso di tempo la cui estensione non si riesce nemmeno ad immaginare, prima che lo stato del sistema ritorni nelle vicinanze delle condizioni iniziali. Per avere un' idea, per $N \sim 10^{24}$ questo tempo di ricorrenza dovrebbe essere dell'ordine di $e^{10^{24}}$ sec $\sim 10^{10^{24}}$ sec. L'età dell'Universo è stimata essere dell'ordine di $10^{10}$ anni $\sim 10^{16}$ sec quindi $\tau \sim 10^{10^{24}-16} \sim 10^{10^{24}}$ età dell'universo. Pertanto nessuno potrebbe mai pensare di osservare un tale evento.

In conclusione ho cercato di dare un'idea di come la freccia del tempo si possa conciliare con la reversibilità microscopica, prevista dalle leggi della meccanica classica. Il fenomeno legato all'esistenza di una freccia temporale per certi versi presenta degli aspetti simili al fenomeno della rottura di simmetria, che si osserva nei fenomeni critici. Ad esempio un ferromagnete è un sistema di particelle assimilabili ad un insieme di magnetini, che interagiscono a livello microscopico tramite un'interazione invariante per inversione spaziale. Pur tuttavia a basse temperature, il sistema nello stato di equilibrio presenta un valore della magnetizzazione in una direzione spaziale particolare, in contrasto con la simmetria a livello microscopico. Analogamente come abbiamo discusso precedentemente, sebbene le leggi del moto siano simmetriche per inversione temporale, lo stato macroscopico presenta un'asimmetria nel tempo. È interessante notare che in entrambi i casi la simmetria viene ristabilita su tempi estremamente lunghi, necessari per superare un'enorme barriera entropica.

* * *

Ho il piacere di ringraziare Marco Zannetti per interessanti discussioni sull'argomento trattato.

## Bibliografia

[1] Lebowitz J. L., *Physica A*, **194** (1993) 1.
[2] Reif F., *Fundamental of Statistical and Thermal Physics* (McGraw-Hill, Singapore) 1988.
[3] Anderson P. W., *Science*, **177** (1972) 393.
[4] Huang K., *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, New York) 1987.
[5] Boltzmann L., *Annalen der Physik*, **60** (1897) 392.