Le coordinate di Fermi e il Principio di Equivalenza

Bruno Bertotti

Qualche mese prima della sua Laurea in Fisica alla Scuola Normale Superiore di Pisa, che ebbe luogo nel luglio del 1922, Enrico Fermi, a 21 anni, inviò per la pubblicazione nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei una nota dal titolo "Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria"; essa fu pubblicata in tre parti, alle pagine 21, 51 e 103 del volume **31** (1922)([1]). Questa nota ha acquistato, ed ha ancora oggi, un'importanza straordinaria per la fisica della gravitazione, non solo per quanto riguarda i suoi fondamenti, in particolare il Principio di Equivalenza, ma anche in numerose applicazioni concrete. Essa mostra una grande abilità tecnica in fisica matematica, in particolare nella rappresentazione geometrica delle ipersuperfici curve (cioè la generalizzazione a un numero di dimensioni superiore a due delle superfici curve ordinarie; in linguaggio preciso, le varietà riemanniane). Fermi non si diffonde invece sul significato fisico ed epistemologico del suo lavoro, benché al primo paragrafo mostri di averne ben compreso l'essenza. Nel 1922 la teoria della Relatività Generale di A. Einstein, nel cui ambito la memoria è stata scritta, era ancora agli albori, soggetta a controversie e dubbi e povera di verifiche sperimentali. Fermi certo aveva studiato a fondo i lavori di T. Levi-Civita sulle varietà riemanniane, che avevano fornito la base matematica della teoria; e certamente conosceva (e cita) il trattato di Hermann Weyl "Raum, Zeit, Materie" (Spazio, tempo e materia) pubblicato da Springer nel 1921, un'introduzione di straordinaria chiarezza fisica e matematica alla teoria della relatività. Ma, certamente, la sua straordinaria creatività gli permetteva di inoltrarsi da solo in regioni sconosciute e dare rilevanti contributi originali.

([1]) È connessa ad essa una nota precedente, "Sull'elettrodinamica di un campo gravitazionale uniforme e sul peso delle masse elettromagnetiche", apparsa nel vol. **22** (1921) del "Nuovo Cimento", a pagg. 176-188; in una memoria successiva, "Sul peso dei corpi elastici", "Rend. Acc. Lincei", **14** (1923) 114-124, si studia l'influenza dell'elasticità sul peso.

1. – Il Principio di Equivalenza

Al fine di comprendere adeguatamente il lavoro di Fermi, anche nel suo contesto culturale, occorre introdurre brevemente la nuova concezione della gravità che A. Einstein ha introdotto nel 1916 con la Relatività Generale.

Alla domanda "Perché un corpo pesa?" viene comunemente risposto "Perché è attirato dalla terra". Oggi sappiamo che questa risposta è profondamente errata e fuorviante e richiede, come accade per tutte le novità radicali del pensiero, una sosta critica e impegnata. Immaginiamo di disporre di una bilancia a molla (un dinamometro) entro un laboratorio all'interno di un razzo che si muove in linea retta nello spazio vuoto, assai lontano dalla terra e supponiamo che i suoi motori imprimino un'accelerazione g volta verso la punta; qual'è il risultato della misura dinamometrica effettuata su un corpo di massa m? Come accade in un treno in partenza, quindi soggetto ad accelerazione, i corpi al suo interno appaiono spinti nella direzione opposta al moto. Nel razzo la bilancia misura un *peso* del corpo del valore mg, identico al valore misurato sulla superficie della terra, quando l'accelerazione di gravità è g; ambedue le quantità sono proporzionali alla massa. Ma allora, se l'osservatore nel laboratorio non conosce nulla circa la situazione dinamica del razzo, né dove si trova la terra, tale misura è perfettamente equivalente a quella sulla superficie della terra, quando l'accelerazione di gravità è g. Occorre concludere che *l'accelerazione genera peso.* Ancora, immaginiamo un piccolo laboratorio in caduta libera verso il centro della terra entro un pozzo verticale; un dinamometro al suo interno misurerà un peso esattamente eguale a zero, proprio come accade all'interno di un razzo in riposo nello spazio vuoto. L'accelerazione del laboratorio compensa esattamente l'accelerazione di gravità. Dobbiamo quindi concludere che il peso di un corpo è determinato dallo stato di moto del laboratorio in cui esso viene misurato (fig. 1). Tra tutti gli stati di moto di un laboratorio ne esiste una classe —i moti rettilinei ed uniformi nello spazio interplanetario, lontano dalla terra, ad esempio; e la caduta libera in un pozzo— per i quali il peso è nullo; il peso misurato nel suo interno è conseguenza dello stato di moto *innaturale* del laboratorio, sia ciò dovuto al motore del razzo o alla piattaforma solida che impedisce a un oggetto sulla superficie della terra di cadere sotto. Gli stati di moto di un laboratorio in caduta libera definiscono i sistemi di riferimento privilegiati —i sistemi inerziali— in cui vale il principio d'inerzia: un corpo non soggetto a forze continua indefinitamente nel suo moto rettilineo ed uniforme. Rispetto a un sistema di riferimento accelerato il moto appare soggetto a una forza (correntemente detta "apparente"), che però è indistinguibile da quella correntemente attribuita ad un corpo gravitante nelle vicinanze. Il Principio di Equivalenza, che A. Einstein ha posto a fondamento della teoria della Relatività Generale, asserisce l'indistinguibilità in un punto tra forze apparenti e forze gravitazionali.

Non si può fare a meno di ricordare a questo punto la straordinaria influenza che il fenomeno del peso esercita sulla biologia e sulla cultura. Ovviamente, l'evoluzione biologica, in particolare il passaggio ad una stazione eretta dalle scimmie all'uomo, è condizionata in maniera essenziale dal peso e sarebbe stata completamente diversa, ad esempio, su un piccolo asteroide o entro una grande astronave a motori spenti; con pesi assai più

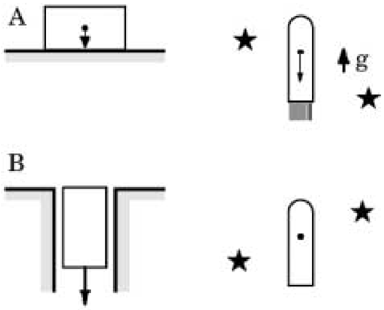

Figura 1. – Il Principio di Equivalenza. Non è possibile distinguere le situazioni a destra da quelle a sinistra: (A) il peso in un laboratorio sulla superficie della terra è indistinguibile da quello entro un razzo accelerato; (B) la stessa assenza di peso ha luogo in un laboratorio in caduta libera in un pozzo e entro un razzo in quiete nello spazio vuoto.

piccoli o addirittura nulli, la cultura e l'evoluzione sarebbero state completamente diverse. Per alzare un oggetto di 70 kg all'altezza di un metro occorrono 700 joule di energia; poiché il corpo umano fornisce approssimativamente un kW di potenza, esso può cadere e rialzarsi, diciamo, una volta al secondo. La tensione connessa con la stazione eretta e i meccanismi psicologici connessi dipendono quindi in maniera essenziale dal valore dell'accelerazione di gravità, sulla terra all'incirca 981 g/cm^2. Il peso determina una direzione privilegiata; l'alto e il basso sono profondamente, inconsciamente e indelebilmente iscritti nella mente umana. Le religioni pongono le divinità buone nei cieli e relegano sotto terra i reprobi; e la grazia scende dall'alto per la salvezza nostra. Nel secondo e terzo millennio prima dell'era cristiana la civiltà neolitica dell'Europa occidentale eresse migliaia di giganteschi megaliti, riaffermando così, forse, la supremazia e la vittoria sulla schiavitù del peso. La bellezza architettonica si fonda sulla contrapposizione tra l'elevazione di strutture e ambienti solidi e il peso a cui esse resistono con stabilità spesso inattesa. Grandi, spesso bellissime strutture —torri, ponti, colonne— dell'ingegneria moderna sono conseguenza diretta della necessità e del desiderio di tenere la gravità sotto controllo. Filosoficamente, si può notare la completa inversione tra la cosmologia aristotelica, in cui lo stato di moto *naturale* dei corpi è la loro caduta verso il centro, a cui la loro essenza stessa tende, e il Principio di Equivalenza, per il quale *il peso è un'illusione, un artefatto* causato dal riferimento sbagliato e innaturale. Da questo errore ha origine la cosmologia aristotelica: essa richiede che al centro stia la terra —il mondo più basso— e all'esterno è gloriosamente coronata dal suo opposto, l'empireo divino. Il contrasto non potrebbe essere maggiore e ci rammenta la precarietà e l'impermanenza di tante nostre concezioni filosofiche e morali.

Sulla base del Principio di Equivalenza, e senza ricorrere a nessun'altra osservazione sperimentale, Einstein costruì lo straordinario edificio fisico e matematico della Relatività Generale. Dal punto di vista concreto essa appare come una teoria della gravitazione concettualmente e completamente diversa da quella classica di Newton —due corpi si attraggono con una forza inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza; però nelle circostanze ordinarie esse hanno conseguenze quasi eguali ed è difficile distinguerle sperimentalmente. Estesi e costosi programmi hanno permesso di studiare in grande dettaglio le differenze tra le conseguenze osservabili delle due teorie e di concludere che il modello newtoniano non è corretto e che al presente la Relatività Generale non ha competitori importanti.

2. – Natura geometrica della gravitazione

Il Principio di Equivalenza asserisce che *localmente* il moto di caduta libera non è distinguibile da un moto inerziale rettilineo ed uniforme. Si ponga attenzione alla parola "localmente", cruciale per il seguito (v. sez. **5**); ovviamente, i due tipi di moto sono diversi se considerati su estese regioni dello spazio e del tempo. In un sistema inerziale e in assenza di corpi gravitanti il moto dei corpi è governato dal concetto geometrico di retta e, quindi, dalla geometria euclidea; non è necessario alcun concetto dinamico, né la massa. Per coerenza, anche in presenza di corpi gravitanti, occorre adottare una simile descrizione del moto; questo viene fatto generalizzando la geometria e il concetto di retta.

Già nel secolo scorso i geometri si erano accorti che le ben note leggi della geometria euclidea (ad esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°) ammettono un'ovvia e potente generalizzazione, suggerita, nel caso di due dimensioni, dalla geometria di una superficie curva (come una sfera). Come nello spazio euclideo un segmento di retta costitusce il cammino più breve tra due punti, così la stessa definizione si applica in generale; su una sfera, ad esempio, i segmenti di "retta" sono gli archi di cerchio massimo, intersezioni con la sfera dei piani passanti per l'origine. Le rotte dei voli intercontinentali avvengono lungo tali archi, minimizzando la distanza percorsa. Le "rette" così definite in uno spazio curvo generico si chiamano *linee geodetiche*. In questa maniera si ottiene una geometria diversa da quella euclidea; ad esempio, su una sfera la somma degli angoli interni di un triangolo costituito da archi di cerchi massimi è sempre maggiore di 180°. Nelle geometrie non euclidee la struttura dello spazio dipende da nuove e complesse variabili; ad esempio, per determinare la geometria di una superficie curva a due dimensioni occorre assegnare in ogni suo punto il *raggio di curvatura* (costante su una sfera). Inoltre l'ambito corretto per descrivere il moto non è lo spazio, ma la combinazione dello spazio e del tempo, un ente geometrico a quattro dimensioni, lo *spaziotempo*.

La grande scoperta di Einstein consiste nel fatto che le traiettorie di corpi (abbastanza leggeri da ritenere trascurabile la loro gravità) in presenza di altri corpi gravitanti sono descrivibili come *geodetiche di uno spaziotempo curvo* opportunamente scelto; in questa maniera, si può dire, il moto gravitazionale è sempre quello naturale e geometrico, che corrisponde al moto rettilineo ed uniforme in uno spaziotempo non curvo; la varietà dei moti gravitazionali è ascritta alla curvatura che qualifica e precisa il carattere non euclideo dello spaziotempo. La natura della gravitazione è geometrica, non dinamica.

La struttura geometrica di una superficie o di uno spaziotempo curvo è completamente determinata quando sia assegnata la distanza (indicata di solito con il simbolo $\mathrm{d}s$)

tra due punti (o eventi) vicini; in termine tecnico, la *metrica*. Da essa scendono le altre proprietà e grandezze geometriche: il parallelismo, i volumi, gli angoli, ecc. Quando i due eventi si trovano sulla traiettoria di un punto materiale la loro distanza è proporzionale all'intervallo di tempo trascorso. La teoria della Relatività Generale permette la costruzione esplicita della metrica e della geometria dello spaziotempo in presenza di corpi gravitanti, in particolare nel sistema solare.

Se lo spaziotempo non è curvo, esiste una classe di sistemi di riferimento che si muovono uno rispetto all'altro di moto rettilineo ed uniforme —i sistemi inerziali— in cui vale il principio d'inerzia e ogni "peso" è eliminato. Ma in presenza di corpi gravitanti questo è possibile solo localmente; è quindi interessante costruire sistemi inerziali locali in cui il peso sia, per così dire, eliminato nella migliore misura possibile.

Su una superficie curva generica non è possibile costruire un sistema globale di coordinate cartesiane; ad esempio, i meridiani di una sfera intersecano l'equatore perpendicolarmente, ma poi si congiungono tutti nei poli. Come si può costruire nell'intorno di un punto P_0 di una superficie curva un sistema di coordinate che meglio approssima uno cartesiano (in cui le parallele agli assi si intersecano perpendicolarmente)? La risposta è semplice: si proiettino i punti P della superficie sul piano π tangente in P_0 e si assumano come coordinate di P le coordinate cartesiane della proiezione, con origine in P_0. Se l'intorno è sufficientemente piccolo, poiché le proprietà geometriche del piano tangente coincidono localmente con quella della superficie, la geometria così ottenuta è euclidea e la distanza tra due punti $P(x, y,)$ e $P'(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ è data dal teorema di Pitagora:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2. \tag{1}$$

Ma, se vogliamo un risultato significativo, occorre sapere in che maniera in queste coordinate l'espressione della distanza è affetta dalla curvatura della superficie. Consideriamo su una sfera un punto P ad una distanza r dal polo P_0 assai minore di R e un altro punto P' assai vicino a P. Siano (x, y) e $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$ le coordinate cartesiane delle loro proiezioni sul piano π tangente nel polo; si dimostra che la distanza $\mathrm{d}s$ tra P e P' è data da

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)\mathrm{d}x^2 + \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)\mathrm{d}y^2 + \frac{2xy}{R^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ (^2). \tag{2}$$

(^{2}) Per il lettore più abile che voglia ottenere questa formula: $\mathrm{d}s^2$ è maggiore del quadrato della distanza euclidea $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ perchè l'arco (o, che è lo stesso, in questa approssimazione, il segmento) PP' ha una componente $\mathrm{d}z = R\mathrm{d}(\cos\theta) = -R\sin\theta\mathrm{d}\theta = -R\theta\mathrm{d}\theta$ ortogonale al piano π. Quando $r/R = \theta \ll 1$ il suo quadrato è

$$\frac{r^2}{R^2}(\mathrm{d}r)^2 = \frac{1}{R^2}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)^2,$$

che porta alla (2).

Si vede che nella distanza vera i coefficienti differiscono da quelli della distanza cartesiana (1) per termini dell'ordine $(r/R)^2$. Questo risultato, in ordine di grandezza, vale per un numero arbitrario di dimensioni: la distanza tra P e P' differisce dalla distanza (euclidea o pseudoeuclidea) su π per termini dell'ordine Kr^2; qui K sta ad indicare l'ordine di grandezza delle grandezze del tipo $1/R^2$ che caratterizzano la curvatura in P_0. Le coordinate così costruite si chiamano *coordinate normali* o di Riemann.

Nel caso dello spaziotempo la geometria è più complessa perchè il teorema di Pitagora (1) ha una diversa espressione anche quando la curvatura è nulla: la natura particolare del tempo si traduce nell'apparizione di segni —nell'espressione della metrica "pseudoeuclidea" (prendendo eguale a uno la velocità della luce)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{3}$$

I quadrati delle "lunghezze" possono essere anche negativi e le lunghezze stesse immaginarie! Anche in questo caso la proiezione su un iperpiano (a quattro dimensioni!) tangente in un evento P_0 permette di approssimare la metrica di uno spaziotempo curvo con l'espressione pseudoeuclidea precedente e di stimare le correzioni nei coefficienti dovute alla curvatura K, di ordine $(rK)^2$.

3. – Le coordinate di Fermi. Geometria

La descrizione tecnica che segue non è strettamente necessaria per comprendere il seguito.

Per definire le coordinate di Fermi nell'interno di un laboratorio in un moto arbitrario occorre anzitutto richiamare il concetto di *linea di mondo.* Nello spaziotempo un evento è determinato da quattro numeri (t, x, y, z), di cui t indica l'istante e (x, y, z) il luogo ove esso avviene. Per descrivere il moto di un punto materiale si assegna la traiettoria $(x(t), y(t), z(t))$ in funzione del tempo; l'insieme degli eventi $(t, x(t), y(t), z(t))$ costituisce la linea di mondo. Ad esempio, se il punto è in riposo nell'origine essa è $(t, 0, 0, 0)$. Se lo spaziotempo è piatto e vale la geometria euclidea le coordinate sono convenientemente definite con un sistema di assi cartesiani. In un evento P_0 —l'origine— si costruisce una quaterna $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ di vettori unitari e ortogonali —la base; le coordinate di un evento P sono le proiezioni del vettore P_0P sui vettori della base:

$$t = \mathbf{e}_t \cdot P_0P, \quad x = \mathbf{e}_x \cdot P_0P, \quad y = \mathbf{e}_y \cdot P_0P, \quad z = \mathbf{e}_z \cdot P_0P.$$

Sian L_0 un punto all'interno del laboratorio (ad esempio, il suo centro di massa) e t il tempo segnato da un orologio su di esso. In ogni evento della sua linea di mondo costruiamo una base ortogonale di riferimento nella maniera seguente. Sia $(\mathbf{e}^0_t, \mathbf{e}^0_x, \mathbf{e}^0_y, \mathbf{e}^0_z)$ una base nell'evento all'origine dei tempi $t = 0$, scelta in maniera che $\mathbf{e}^0_t$ sia tangente alla direzione $\mathbf{u}_0$ della linea di mondo e, quindi, i vettori spaziali $(\mathbf{e}^0_x, \mathbf{e}^0_y, \mathbf{e}^0_z)$ giacciano in un piano π_0 ortogonale a $\mathbf{u}_0$. Per ottenere la base in un evento vicino corrispondente al tempo $\mathrm{d}t$, anzitutto trasportiamo parallelamente ivi la base dell'origine $t = 0$; nella fig. 2 essa,

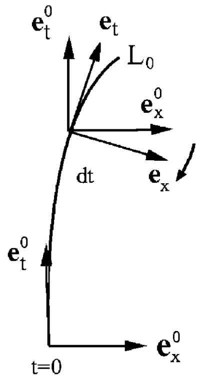

Figura 2. – La base di Fermi annessa alla linea di mondo L_0 di un punto in moto accelerato. Una base $(\mathbf{e}_t^0, \mathbf{e}_x^0, \mathbf{e}_y^0, \mathbf{e}_z^0)$ nell'origine dei tempi, con $\mathbf{e}_t^0$ tangente a L_0, viene trasportata in un evento vicino e ruotata nel piano $(\mathbf{e}_t^0, \mathbf{u})$ in maniera che il nuovo vettore temporale sia parallelo al vettore tangente $\mathbf{u}$. Nella figura è illustrato il caso in cui il vettore $\mathbf{e}_x^0$ giace in questo piano. La costruzione viene ripetuta per tutti gli istanti. (Per il lettore sofisticato ed esperto si deve aggiungere che questa rappresentazione grafica vale solo quando la metrica è definita positiva e la geometria è euclidea; nel caso dello spaziotempo la metrica non è definita e vale la geometria *pseudoeuclidea* e occorre usare una costruzione diversa).

per semplicità, è indicata con gli stessi simboli. Se il punto L_0 non è accelerato il vettore $\mathbf{e}_t^0$ è ancora tangente alla linea di mondo L_0. Per formalizzare il Principio di Equivalenza, tuttavia, occore considerare il caso generale in cui il laboratorio, e quindi anche L_0, è accelerato; ma allora $\mathbf{e}_t^0$ non è più parallelo al vettore $\mathbf{u}$ tangente a L_0 in dt. In tale evento è quindi definito il piano dei due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{e}_t^0$. In questo piano eseguiamo la rotazione infinitesima di tutta la base in dt che porta $\mathbf{e}_t^0$ nella nuova posizione tangente a $\mathbf{u}$. Nella fig. 2 è illustrato il caso in cui il piano suddetto contiene $\mathbf{e}_x^0$; in tal caso la rotazione lascia invariati gli altri due vettori spaziali della base $\mathbf{e}_y^0, \mathbf{e}_z^0$; in generale, però, tutta la base in dt è affetta dalla rotazione e portata in una nuova posizione $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, naturalmente mantenendone l'ortogonalità e il carattere unitario. Ripetendo questa costruzione per ogni istante successivo otteniamo per ogni evento P_t di L_0 la base di Fermi. Essa è costituita da un vettore $\mathbf{e}_t$ ad essa tangente e da una terna $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ nello spazio tridimensionale ortogonale π_t.

Per costruire le coordinate di Fermi supponiamo anzitutto che non vi siano corpi gravitanti vicini e che lo spaziotempo sia piatto. Dato un evento P, sia π_t lo spazio ortogonale a L_0 che lo contiene; il tempo t così individuato è la coordinata temporale di P. Le coordinate spaziali di P sono le proiezioni di PP_t sulla terna di riferimento in π_t (fig. 3):

$$x = \mathbf{e}_x \cdot PP_t, \quad y = \mathbf{e}_y \cdot PP_t, \quad z = \mathbf{e}_z \cdot PP_t.$$

Se l'evento P è parte di una linea di mondo L le sue coordinate $(x(t), y(t), z(t))$ definiscono il moto relativo di L rispetto a L_0.

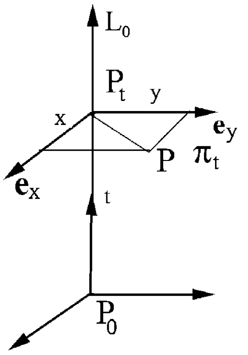

Figura 3. – Le coordinate di Fermi relative a una linea di mondo L_0. Il piano per un evento P interseca ortogonalmente L_0 in un evento P_t che dista t dall'origine P_0; t è la coordinata temporale di P. Le coordinate spaziali (x, y, z) si ottengono proiettando il segmento P_tP sui tre assi spaziali in P_t.

Come mostra Fermi, l'estensione di questa costruzione al caso in cui lo spaziotempo è curvo è semplice e si basa sull'immersione in uno spazio piatto con un numero più alto di dimensioni. Essa, però, come vedremo più avanti, vale solo quando la distanza r non è molto grande, quindi entro un intorno tubulare avente per asse L_0.

4. – Le coordinate di Fermi. Fisica

Prima di approfondire il significato fisico delle coordinate di Fermi conviene premettere tre osservazioni. Notiamo, anzitutto, il carattere puramente geometrico della costruzione. Fin dall'inizio gli studiosi della relatività avevano a disposizione due tecniche diverse: il calcolo algebrico e differenziale basato su specifiche coordinate e l'uso esplicito di componenti vettoriali e tensoriali, spesso con complessi indici; e il metodo geometrico, che usa solo i concetti di segmento, angolo, volume, ecc. Non c'è dubbio che il secondo, introdotto nel 1908 da H. Minkowski, è, se praticabile, più potente ed appropriato per una teoria essenzialmente geometrica come la Relatività Generale; però il primo è più semplice e più vicino alle modalità di calcolo dei fisici, abituati all'uso di grandezze fisiche misurate in concreti sistemi di riferimento. Questa duplicità è tuttora presente e si deve riconoscere che il primo metodo, in generale concettualmente più facile e spesso l'unico disponibile, ha un seguito molto maggiore. Ma esso ha dato luogo a numerosi errori e false strade; l'esempio più clamoroso è quello del fisico sovietico V. A. Fock che nel suo libro "The Theory of Space, Time and Gravitation" (pubblicato in inglese nel 1959) arrivò all'assurdo di attribuire significato fisico a particolari coordinate matematicamente definite. È quindi assai interessante notare che Fermi, la cui formazione scientifica era essenzialmente fisica, usò subito e senza incertezze la strada geometrica.

In secondo luogo, la trattazione di Fermi vale per arbitrari valori delle velocità, anche vicine a quella della luce, e contiene implicitamente gli effetti relativistici della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze. Essa, in sostanza, definisce per ogni evento di L_0 una trasformazione di Lorentz "locale" che varia da istante a istante; e ciò in maniera geometrica, senza usare farraginose matrici.

Da ultimo, forse i lettori più attenti potranno chiedersi, che ruolo ha in questa costruzione l'orientazione del laboratorio attorno al suo centro di massa? Il trasporto parallelo, infatti è definito in maniera puramente geometrica e non ammette arbitrarietà alcuna; ma come si ottengono operativamente le coordinate di Fermi all'interno di un laboratorio ruotante? Per esempio, coordinate solidali con un laboratorio posto sulla superficie della terra (ruotante) non sono certo appropriate. Fermi non accenna a questo problema e prende per scontato che la geometria stessa, attraverso il parallelismo nello spaziotempo, definisca l'assenza di rotazione. Viene così introdotto surrettiziamente un elemento assoluto e *a priori* indipendente dalle misure e dagli oggetti materiali che necessariamente occorre usare per verificarne la sua realizzazione; un procedimento contrario ai principi epistemologici di E. Mach, per esempio. Possiamo qui dire, per brevità, che in pratica la rotazione assoluta viene fatta rispetto alla materia lontana, in particolare le radiogalassie. Tale definizione corrisponde, nei limiti della presente (ed assai elevata) accuratezza, con la definizione locale del parallelismo geometrico.

Una volta costruite esplicitamente le coordinate locali (t, x, y, z) non è stato difficile a Fermi ottenere l'espressione della generalizzazione del "Teorema di Pitagora" nello spaziotempo (3):

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2. \tag{4}$$

Qui $\mathbf{a}$ è l'accelerazione vettoriale di L_0 e $\mathbf{r}$ il vettore (x, y, z). Si noti che per accelerazione si intende una precisa grandezza geometrica che misura la deviazione della linea di mondo da una geodetica. In questa formula è contenuta la dinamica in un sistema di riferimento non inerziale (sulla superfice terrestre o in un razzo accelerato): un corpo libero, che si muove lungo una geodetica di tale metrica, possiede l'accelerazione $-\mathbf{a}$.

Occorre infine precisare l'errore commesso prendendo la metrica nella forma precedente (4), in cui l'influenza della curvatura dello spazio sulla metrica è trascurata. Il risultato ottenuto nel caso della sfera (eq. (2)) non è molto diverso da quello in cui si considera l'intorno tubulare di una geodetica: la distanza ds è data ancora da una forma quadratica nei differenziali delle coordinate $\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ in cui i coefficienti differiscono da quelli della (4) per termini che sono funzioni del tempo e di ordine Kr^2; però qui r è la distanza dalla geodetica nello spazio ortogonale. Ad esempio, con una sola dimensione spaziale x abbiamo tre correzioni:

$$\mathrm{d}s^2 = [1 + K_{tt}(t)x^2]\mathrm{d}t^2 - [1 + K_{xx}(t)x^2]\mathrm{d}x^2 + 2K_{tx}(t)x^2 \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

Le funzioni $K(t)$ hanno dimensione L^{-2} e sono determinate dalla curvatura dello spaziotempo. L'errore commesso nel trascurare la curvatura in un laboratorio sulla terra è assai piccolo. La curvatura dello spaziotempo nel sistema solare è determinata essenzialmente dal sole ed è, ad una distanza D da esso, di ordine

$$K = \frac{GM_\odot}{c^2 D^3} = 10^{-8} \left(\frac{1 \text{ UA}}{D} \right) \frac{1}{D^2}, \tag{6}$$

ove l'Unità Astronomica (UA) è la distanza terra-sole, 150 milioni di km. Per un laboratorio terrestre di dimensioni r l'errore Kr^2 è di ordine $10^{-8}(r/D)^2$; se r è il raggio della terra esso è $\approx 2 \times 10^{-18}$! Di questo ordine di grandezza è l'influenza della gravitazione sui fenomeni locali.

È interessante notare che l'importante problema dell'errore che si commette adottando la metrica di Fermi (4) è stato trascurato sino agli anni '70; il lettore troverà l'espressione esplicita di queste correzioni in [1] e [2]. La costruzione delle coordinate di Fermi in uno spazio curvo, quando la linea centrale L_0 non è geodetica, è merito di Walker [3]. In [4] le coordinate geodetiche sono state estese al caso in cui, oltre alla curvatura prodotta da corpi lontani, vi è anche un contributo da corpi gravitanti vicini, come la terra.

5. – La natura della gravità

Siamo ora in grado di chiarire il paradosso della sez. **2**: se il peso è un'illusione, che cosa è la forza gravitazionale, che pure ha un ruolo fondamentale nella struttura dei corpi celesti e nei sistemi planetari?

Nelle equazioni di moto di un corpo libero i coefficienti (adimensionali) della metrica hanno il ruolo di potenziali gravitazionali per unità di massa (adimensionali quando la velocità della luce è eguale all'unità). Ad esempio, quando la velocità del corpo è piccola rispetto a quella della luce, il coefficiente di $\mathrm{d}t^2$ è eguale a $1 - 2U$, ove U è il potenziale Newtoniano (per unità di massa). Difatti nel caso di Fermi (eq. (4)) tale coefficiente è

$$(1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 = 1 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \dots$$

e corrisponde correttamente al potenziale $-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$. Le correzioni metriche (5) corrispondono quindi a un potenziale *quadratico* nelle coordinate (x, y, z).

Nel caso a una dimensione spaziale (5) il moto relativo, quando la velocità non è elevata, è determinato dal potenziale $-K_{tt}x^2/2$, che corrisponde all'accelerazione $K_{tt}x$. In generale, il moto relativo, se descritto nelle coordinate di Fermi, ha un'accelerazione (relativa) *lineare* nelle coordinate spaziali e di ordine Kr. Ciò corrisponde, in meccanica classica, al moto relativo in un potenziale per unità di massa U di due corpi in $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}$ la cui distanza r è assai più piccola della scala caratteristica $D = U/|\nabla U|$ su cui varia U; in tal caso la loro accelerazione relativa è

$$-\nabla U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) + \nabla U(\mathbf{r}_1) = -\mathbf{r} \cdot \nabla\nabla U(\mathbf{r}_1) + \dots,$$

ove la matrice a tre dimensioni $\nabla\nabla U$ è calcolata nella posizione $\mathbf{r}_1$ del primo corpo e quindi, in generale, è una funzione del tempo. Accelerazioni di questa forma sono quelle che governano le maree: l'effetto della luna e del sole su una particella dell'oceano posta

Figura 4. – Solo osservando il moto *relativo* di due corpi è possibile rivelare e misurare la gravitazione dovuta a un corpo vicino: ad esempio, in un laboratorio sulla superficie della terra le traiettorie di due corpi inizialmente in riposo convergono verso il centro della terra, mentre entro un razzo accelerato sono parallele.

nella posizione $\mathbf{r}$ rispetto al centro della terra è descritto dall'espressione precedente. In Relatività Generale l'accelerazione relativa di due punti in moto geodetico ha la forma

$$\mathsf{K} \cdot \mathbf{r}, \tag{7}$$

ove la matrice tridimensionale K è determinata dalla curvatura dello spaziotempo. Anche in questo caso potremo parlare quindi di *accelerazione mareale*. Questa legge di moto prende il nome di *equazione della deviazione geodetica*, in quanto descrive come due linee geodetiche vicine si allontanano o si avvicinano per effetto della curvatura.

Quindi, benché l'accelerazione prodotta su un corpo singolo non sia osservabile, il moto relativo di due corpi è affetto dalla gravità attraverso gli effetti mareali; solo questi permettono di decidere, entro un laboratorio chiuso, se l'accelerazione misurata sia dovuta alla vicinanza della terra o alla propulsione di un razzo. Supponiamo, infatti, di togliere gli ostacoli al moto per due corpi in riposo all'interno del laboratorio; se esso è spinto da un razzo le loro traiettorie sono parallele, ma se esso è posato sulla superficie della terra le traiettorie convergono verso il suo centro: una differenza piccolissima, ma cruciale (fig. 4).

Quindi per descrivere i fenomeni gravitazionali in una regione piccola rispetto alla scala caratteristica le coordinate generalizzate di Fermi sono essenziali. Poiché esse sono definite in maniera geometrica ed invariante, con il loro uso non si corre il rischio di trarre conclusioni circa fenomeni inosservabili, come il peso; il formalismo matematico è concentrato sull'effetto essenziale, l'accelerazione relativa. Questo strumento concettuale e di calcolo è oggi essenziale, per esempio, per la progettazione e il funzionamento dei rivelatori di onde gravitazionali, strumenti le cui dimensioni sono, in generale, assai più piccole della lunghezza d'onda di interesse. Essi sono, in sostanza strumenti che determinano la curvatura dello spaziotempo attraverso la deviazione geodetica sperimentata da due punti materiali vicini.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] MISNER C. W., THORNE K. S. e WHEELER J. A., *Gravitation* (Freeman) 1973.

[2] MANASSE F. K. e MISNER C. W., *Fermi nomal coordinates and some basic concepts in differential geometry*, *J. Math. Phys.*, **4** (1963) 735-745.

[3] Walker A. G., *Relative coordinates*, *Proc. R. Soc. Edinburgh*, **52** (1932) 345-353.
[4] Ashby N. e Bertotti B., *Relativistic Perturbations of an Earth Satellite*, *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 485-488.

Bruno Bertotti è professore di Astrofisica all'Università di Pavia; i suoi prevalenti interessi riguardano ora la fisica spaziale; nella sua ricerca si è anche ampiamente occupato di fisica della gravitazione, sia teorica che sperimentale. All'inizio della sua carriera, negli anni '50, è stato allievo di E. Schrödinger a Dublino.