Sugli invarianti adiabatici(*)

TULLIO LEVI-CIVITA - Roma

Dei sistemi canonici

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la cui funzione caratteristica H, indipendente da t, contenga dei parametri a lentamente variabili, si conoscono due tipi particolarmente cospicui di invarianti adiabatici:

1° (Teoremi di Gibbs-Hertz). Il volume V racchiuso, nello spazio delle fasi da una generica varietà isoenergetica

$$H = E \qquad (E \text{ costante}),$$

il quale spetta ai sistemi quasi ergodici; sistemi che non ammettono, oltre $H = E$, altri integrali uniformi (cfr. per es. nn. 3-5 del presente scritto).

2° (Teorema del Burgers). Gli n integrali ciclici del Sommerfeld

$$J_i = \oint p_i \, dq_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

i quali sono invarianti adiabatici per i sistemi (dello Stäckel) integrabili mediante separazione delle variabili, nonchè, dotati complessivamente di n integrali, (quadratici nelle p).

Abbiamo qui due casi estremi, corrispondenti rispettivamente al minimo (cioè uno) e, in certo senso, al massimo (cioè n) di integrali uniformi nelle condizioni supposte.

(*) Tratto dal "Resoconto del Congresso Nazionale dei Fisici", Como, 11-20 Settembre 1927, in occasione delle Onoranze ad Alessandro Volta nel primo centenario della morte, vol. II, pp. 475-513 (per gentile concessione di Zanichelli Editore, Bologna).

Nessun risultato altrettanto preciso per quanto mi consta, conseguito circa i casi intermedi, cioè per i sistemi canonici i quali posseggono, oltre ad $H = E$, un certo numero, diciamo m, di integrali uniformi (indipendenti)

$$F_r = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Anzi il Fermi aveva fatto rilevare (n. 7) che non è accettabile, almeno in generale, quella definizione di variazione adiabatica delle costanti E e c_r, che parrebbe la più spontanea in base ai soli principî della meccanica statistica, prendendo norma dal caso quasi ergodico.

Mi propongo di mostrare (nn. 8-15) come, nell'ipotesi che gli m integrali F_r siano in involuzione tra loro, i metodi classici della meccanica analitica, e in particolare la considerazione, che risale al Morera, di certi sistemi associati ai differenziali totali suggeriscono un criterio diverso (anch'esso del resto ispirato da stretta analogia col caso quasi ergodico) per impostare il legame adiabatico (fra le variazioni delle E, c_r e quelle dei parametri a) in modo che riescano automaticamente soddisfatte le condizioni di integrabilità. Se ne desume (n. 14) la *esistenza di $m + 1$ invarianti adiabatici, costruibili mediante quadrature.* In questa proposizione rientra (n. 16) il teorema del Burgers come un caso molto particolare. Non solo, ma la nuova dimostrazione dell'invarianza adiabatica degli integrali J_i cui si perviene in tal guisa abbraccia senza riserve anche quei casi di parziale o totale commensurabilità (di certi periodi) pei quali le dimostrazioni dirette richiedevano, invece, come è ben noto, discussioni complementari minuziose e svariati sussidi analitici. In fine ho fugacemente segnalate ulteriori applicazioni e possibili estensioni (n. 17).

1. *Le recenti teorie dell'atomo e i loro schemi.* – Secondo le leggi della meccanica classica i movimenti che un sistema (olonomo) con n gradi di libertà può assumere in date condizioni di sollecitazione dipendono in modo continuo da $2n$ costanti (condizioni iniziali) suscettibili di assumere (in un certo campo) tutti i possibili valori (di quel campo).

Niels Bohr(1) fondò la sua teoria dell'atomo su premessa dell'ordinaria meccanica (anzi, per l'atomo d'idrogeno, sul problema dei due corpi), inserendovi tuttavia, con ardito connubio, un postulato estraneo che deriva invece dalla concezione quantistica del Planck, e fa quindi intervenire il discontinuo.

Schematicamente, tutto si riduce alla introduzione di orbite privilegiate, le quali corrispondono a soli valori in progressione aritmetica, più precisamente del tipo $nh/2\pi$ (n numero intero, h costante del Planck) di alcune combinazioni opportune $J_0,\ J_1, \ldots,\ J_m$, (una sola nel caso più semplice originariamente considerato dal Bohr) delle costanti di integrazione.

La teoria, sviluppata con fervore degno delle sue conseguenze grandiose, dallo stesso Bohr e da altri fisici eminenti, trovò mirabili conferme spettrali e anche, per merito principale del Sommerfeld (2), un pronto assetto sistematico, mantenuto al corrente (fino

(1) Cfr. per es. *Les spectres et la théorie de l'atome.* Paris, Hermann, 1923.
(2) *Atombau und Spektrallinien.* Braunschweig, Vieweg, 1922; 4ª ed., 1924.

all'anno scorso) da edizioni successive del libro del Sommerfeld, e da nuovi trattati, quali quelli di Born e Hund ([3]), dell'Andrade ([4]), del Juvet ([5]), nonché da scritti monografici ricchi di idee originali, dovuti, oltreché agli autori già citati, segnatamente a Jeans ([6]), Jordan, Heisenberg, Kramers, Slater ([7]), ecc.

Il suaccennato connubio della meccanica newtoniana con un principio selettivo di discontinuità quantistica dispiacque a molti fisici: e non ai tradizionalisti soltanto; donde, da un lato, gli sforzi simultanei di Heisenberg, Born, Jordan, di quest'ultimo da solo e del Dirac ([8]) per eliminare dalla teoria dell'atomo ogni elemento non accessibile all'esperienza diretta e costituire una meccanica dei fenomeni periodici su base nettemante discontinua (calcolo delle matrici); dall'altro il geniale ritorno al modello delle vibrazioni dei mezzi continui attraverso la meccanica ondulatoria di De Broglie ([9]) e Schrödinger ([10]), secondo cui (in accordo non meno perfetto coi risultati sperimentali) la spiegazione del comportamento discontinuo delle linee spettrali si riporta ad autovalori ed autofunzioni di equazioni differenziali definienti lo stato del mezzo; e infine le piú generali concezioni di Hilbert, v. Neumann e Nordheim, che abbracciano entrambi i punti di vista ([11]).

Se a questo nuovo indirizzo, singolarmente suggestivo e fecondo, sono oramai volti di preferenza gli sforzi dei cultori della fisica teorica, non è però il caso di abbandonare l'assetto intermediario, che dirò per intenderci: assetto ibrido, e sotto tale rapporto del Sommerfeld, cui era pervenuta la teoria dell'atomo associando un unico principio quantistico alla meccanica ordinaria "a Dio spiacente ed ai nemici sui", ma indubbiamente suggestivo, rispondente a forme elementari e concrete di intuizione fisica, e sopratutto atto a condurre alle relazioni quantitative nel modo più semplice coi procedimenti abituali della meccanica analitica.

2. *Invarianti adiabatici secondo Ehrenfest* ([12]) *e loro importanza speculativa nell'opera di sistemazione del Sommerfeld.* – Fondamentale, sotto questo punto di vista ecclettico, è lo studio (peri i sistemi dinamici che si collegano ai vari tipi di atomi) di quelle combinazioni,

$$J_0,\ J_1, \dots,\ J_m$$

([3]) *Vorlesungen ueber Atomdynamik.* Berlin, Springer, Bd. I, 1925.
([4]) *The structure of the atom.* London, Bell, 1923; 3ª ed., 1927.
([5]) *Mécanique analytique et théorie des quanta.* Paris, Blanchard, 1926.
([6]) *Atomicity and quanta.* Cambridge University Press, 1926.
([7]) In numerosi articoli, segnatamente della "Zeitschrift für Physik", 1924-1927.
([8]) Veggansi, sopratutto per gli autori tedeschi, le annate 1926 e 1927 della già citata "Zeitschrift für Physik", e, per gli articoli del Dirac, il vol. 112, 1926, dei "Proc. of the R. S. of London".
([9]) *Ondes et mouvements.* Paris, Gauthier-Villars, 1926.
([10]) *Abhandlungen zur Wellenmechanik.* Leipzig, Barth, 1927.
([11]) Cfr. una memoria di questi tre autori *Ueber die Grundlagnen der Quantentheorie* in "Math. Ann.", B. 98, pag. 1-30; nonché v. Neumann, *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, "Göttinger Nachr.", 1927, pag. 1-57.
([12]) *Adiabatic invariants and the theory of quanta*, "Phil. Mag.", vol. XXXIII, 1917, pp. 500-513.

delle costanti di integrazione cui vanno atribuiti i valori $nh/2\pi$ (interi a meno del fattore universale $h/2\pi$).

L'Ehrenfest le chiamò *invarianti adiabatici*, e noi ci atterremo a tale designazione; mentre lo Smekal, contestando l'opportunità della qualifica *adiabatici*, propose di dirli più genericamente *parametri invarianti.* Indipendentemente dal nome è essenziale la veduta fisica che vi si collega, dovuta precisamente all'Ehrenfest, e generalmente nota come principio delle adiabatiche. Si tratta di questo. Supponiamo che nel modello meccanico di un dato sistema atomico intervengano masse, vincoli, o forze suscettibili di variare con continuità: ciò si traduce matematicamente nell'ipotesi che le equazioni dinamiche, o, se si vuole, la funzione caratteristica H del sistema canonico da esse costituito dipendano da un certo numero (non importa precisarlo) di parametri $a_1,\ a_2,\ldots$, che designeremo complessivamente con a.

Se, al variare continuo di questi parametri a, non si altera la specie qualitativa del sistema meccanico, in guisa che esso costituisca in ogni stadio il modello di un sistema atomico (pel quale ad es. la modificazione graduale dei valori dei parametri sia fisicamente interpretabile come dovuta ad alterazioni di temperatura, di ambiente, di stato elettrico, ecc.) è manifesto che le combinazioni caratteristiche

$$J_0,\ J_1,\ldots,\ J_m$$

debbono, da un lato, variare anch'esse con continuità, dall'altro conservare valori interi (a meno di quel fattore costante). Ciò è possibile solo a patto che tali combinazioni rimangano costanti.

Ecco il principio di Ehrenfest, che pone, anche ai superstiti cultori di meccanica pura, lo studio astratto, interessantissimo per se e per le aplicazioni, degli invarianti adiabatici.

3. *Caso dei sistemi canonici. Volume nello spazio delle fasi.* – Limitiamoci, per fissare le idee, alla considerazione di un sistema canonico di rango $2n$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

la cui funzione caratterisitca H dipende dalle p, dalle q dai parametri a, ma non esplicitamente da t.

Supponiamo che (nel campo in cui si faranno variare i parametri a) le varietà isoenergetiche

$$H = E \tag{2}$$

siano *superficie* (più precisamente varietà a $2n-1$ dimensioni) *chiuse* nello spazio Φ_{2n} delle fasi (rappresentativo delle $2n$ variabili coniugate p e q). Indicheremo con V e chiameremo *volume* (anche se si tratta di un campo a più di tre, ovvero a due sole dimensioni) l'estensione euclidea dell spazio Φ_{2n} delle fasi, racchiusa da una generica σ. Orbene, se il sistema canonico (1) è *quasi-ergodico*, cioè se, non esistendo altri integrali uniformi oltre (2), tutte o "quasi tutte" ([13]) le traiettorie lungo cui E ha un assegnato valore riempiono *praticamente* (cioè nel senso ben noto) la σ corrispondente, il volume V, interno ad essa, è un *invariante adiabatico.*

Questa bella proprietà è pressochè implicita in alcune considerazioni ampiamente svolte dal Gibbs nel suo celebre trattato di meccanica statistica ([14]), ma non vi è esplicitamente enunciata. Il merito di averla messa in luce, collegandola specificamente ai processi adiabatici (in un senso ben precisato che richiameremo tra un momento) spetta a Paul Hertz ([15]).

4. *Dimostrazione dovuta a P. Hertz dell'invarianza adiabatica di V.* – Dato l'interesse del risultato, anche per lo scopo che abbiamo in vista, vale la pena di indicarne rapidamente la deduzione.

Ricordiamo anzitutto come si definisce, nel caso dei sistemi quasi-ergodici, il valore medio $\overline{F}$ spettante ad una qualsiasi funzione (continua) del posto $F(p|q)$ sopra una data superficie isoenergetica σ, supposta tutta contenuta in un campo di regolarità della funzione $H(p|q)$.

In ogni punto *ordinario* (cioè non multiplo) M di detta superficie una almeno delle $2n$ derivate parziali di H è differente da zero. Indichiamo con z quella (o una di quelle) p o q per cui (nel punto ordinario in questione) $\frac{\partial H}{\partial z} \neq 0$. Indichiamo poi con x il cmplesso delle $2n-1$ rimanenti p, q e con dX il prodotto dei loro $2n-1$ differenziali. Mercè la relazione

$$H = E \tag{2}$$

è possibile sostituire, come $2n$ variabili indipendenti, alle originarie p e q, ossia, se si vuole, alle x e alla z, le stesse x in numero di $2n-1$, e la E. Le x si possono risguardare, in un intorno di M, quali coordinate dei punti della ipersuperficie σ. Ed è subito visto dalla trasformazione degli integrali multipli, che l'elemento di volume (euclideo) dV dello spazio delle fasi può essere posto sotto la forma

$$dV = dp_1 \dots dp_n \, dq_1 \dots dq_n = dz \, dX = \frac{dEdX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|} \,. \tag{3}$$

Secondo i principi della meccanica statistica, attribuendo allo spazio delle fasi una densità uniforme, ogni campo elementare dX circostante ad un punto generico M di una superficie isoenergetica σ fornisce al valore medio di una funzione un contributo

([13]) Il "quasi tutte" si precisa come segue: si immagini una traiettoria generica individuata dai valori iniziali p_i^0, q_i^0. Si attribuiscano, sopra una generica varietà (2), ad un insieme σ_1 i punti (p_i^0, q_i^0), da cui esce una traiettoria densa in tutto σ_1, all'insieme complementare σ_2 i punti da cui esce invece una traiettoria periodica o escludente alcuna porzione di σ. La misura (ipersuperficiale) di σ_2 deve essere nulla.
([14]) *Statistical mechanics.* Yale University Press, 1902.
([15]) Cfr. WEBER-GANS - *Repertorium der Physik.* Leipzig, Teubner, 1916, Bd I, N. 270, pag. 535.

elementare proporzionale a

$$\frac{F(M)dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|} .$$

Se la σ non ha punti multipli, basterà dividerla in un numero finito di pezzi scegliendo, entro ognuno di questi una z opportuna (fra le $2n$ p e q) perchè abbia senso e rimanga univocamente determinato (in qualunque modo si proceda alla divisione in pezzi) un integrale del tipo

$$N = \int_\sigma \frac{F(M)dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|} . \tag{4}$$

Posto in particolare

$$D = \int_\sigma \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|} , \tag{5}$$

si assume come valore medio $\overline{F}$ della funzione F

$$\overline{F} = \frac{N}{D} . \tag{6}$$

Se vi sono punti multipli, bisognerebbe fare una discussione un po' più approfondita, ma si giustifica egualmente la considerazione di integrali del tipo D e N e quindi seguita ad essere valida la nozione di valore medio di una funzione (finita e continua) $F(M)$.

Tutto ciò premesso, riprendiamo l'ipotesi che H dipenda, non soltanto dalle p, q, ma anche da certi parametri a, e facciamoli variare in modo così lento — in questo sta la giustificazione dall'aggettivo adiabatico — che nel frattempo il punto M di σ, rappresentativo dell'atto di moto, muovendosi lungo una traiettoria generica (di quelle dense in σ), abbia sensibilmente invaso l'intera superficie $H = E$.

Se ai parametri a si attribuiscono degli incrementi arbitrari da, in un determinato punto M della σ (definito dalle coordinate p, q), l'incremento corrispondente $H(p|q)$ vale manifestamente

$$d_a H ,$$

le p, q rimanendo inalterate.

Nella ipotesi però che un incremento (anche elementare) delle a si compia mentre il punto rappresentativo $M(p, q)$ del sistema dinamico invade sensibilmente l'intera σ, è ben naturale di pensare che H subisca, non *l'incremento locale* $d_a H$, spettante alla fase iniziale o ad altra fase istantanea, sibbene la media relativa ad un intervallo di tempo abbastanza lungo perchè possa contribuirvi l'intera σ. In conformità si ammette che ad una variazione elementare adiabatica dei parametri a rimanga subordinata come variazione indotta nella funzione H il valore medio $\overline{d_a H}$, formato a norma delle (4), (5), (6).

Questo incremento medio della H, dipendente soltanto dalla a e da (non dalle p, q) va così risguardato come definizione dell'alterazione d_aE che subisce l'energia totale E del sistema (spettante ad una soluzione generica) al variare adiabatico, nel senso ora dichiarato, dei parametri a, da cui dipende il meccanismo del sistema attraverso la funzione caratteristica $H(p|q|a)$. Siamo quindi condotti a porre

$$d_aE = \overline{d_aH} = \int_\sigma d_aH \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|} : \int_\sigma \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|}, \tag{7}$$

il che non dà luogo ad osservazioni nel caso di un solo parametro a, ma, nel caso di più parametri, può considerarsi giustificato soltanto a patto che il secondo membro costituisca un differenziale esatto rispetto agli argomenti a ([16]).

Ora è facile riconoscere (teorema di Paul Hertz) che ciò accade effettivamete, anzi che la funzione $E(a)$, definita dalla equazione ai differenziali totali (7) si identifica con quella definita in termini finiti

$$V(a|E) = \text{cost.}, \tag{8}$$

V designando, come già si convenne, il volume dello spazio delle fasi racchiuso da una generica superficie $H = E$.

Per accertarlo, basta valutare, in base al suo significato geometrico di volume, l'alterazione che subisce la funzione (8), quando alle a e alla E si attribuiscono incrementi arbitrari da, dE.

Considereremo come variabili indipendenti nello spazio delle fasi le x e la E, fissando l'attenzione sopra un punto generico M della σ e un suo circostante elemento dX. Prima però facciamo ancora un'osservazione sulla equazione

$$H = E, \tag{2}$$

trattandovi le a, p, q, come variabili indipendenti e la E come loro funzione. In tale accezione l'attribuire alle a incrementi da (lasciando inalterate le p, q) equivale a passare (nell'intorno del punto generico M cui si riferiscono i valori delle p e delle q) dalla superficie isoenergetica $H = E$ all'analoga $H = E - d_aH$. Ne consegue che, per l'incremento dato alle a, la E, in prossimità di M, si incrementa di $-d_aH$, rimanendo inalterate le x, e la z variando nel modo voluto dalla (2). Perciò, in corrispondenza all'elemento superficiale dX, il volume V subisce l'incremento (3), in cui si ponga per dE il valore ora detto, ossia

$$\frac{-d_aH\,dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|}. \tag{9}$$

([16]) Infatti, in caso diverso, l'energia E non potrebbe risguardarsi come funzione uniforme delle a, pur variando queste in modo adiabatico da una determinazione iniziale a^0 ad una determinazione finale a^1, si avrebbe per la E una alterazione ΔE dipendente ulteriormente dal cammino lungo cui le a passano (nello spazio che le rappresenta) dal punto a^0 al punto a^1.

Sommando tutti questi attributi, si ha

$$d_a V = -\int_\sigma \frac{-d_a H \, dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|}. \tag{10}$$

Quanto a

$$d_E V = \frac{\partial V}{\partial E} \, dE, \tag{11}$$

esso non è altro che il volume (dello spazio delle fasi) compreso fra la $H = E$ e la $H = E + dE$, il quale, valutato come sopra, si trova espresso da

$$d_E V = dE \int_\sigma \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|}. \tag{11}$$

Se si considera E come funzione delle a definita dalla (8), il differenziale totale $dV = d_a V + d_E V$ si annulla; si ha quindi dalle (10), (11), scrivendo per maggior chiarezza $d_a E$, al posto del generico dE,

$$-\int_\sigma \frac{d_a H \, dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|} + d_a E \int_\sigma \frac{dX}{\left|\frac{\partial H}{\partial z}\right|} = 0, \tag{7$'$}$$

che coincide materialmente colla (7) e dimostra appunto essere $d_a E$ differenziale esatto della funzione E della a definita dalla (8). Viceversa, se si definisce $d_a E$ in base alla (7), ciò che traduce, nelle circostanze supposte, la variazione adiabatica dei parametri a, ne risulta in virtù della (7′), attese le (10) e (11), $dV = 0$, onde rimanere acquisito il risultato fondamentale che il volume dello spazio delle fasi, racchiuso da una superficie isoenergetica $H = E$, è un invariante adiabatico.

5. *Caso di un solo grado di libertà. Esempi elementari.* – Per quanto si tratti di cose dette e ripetute in più guise (dagli autori citati e da altri), ci soffermeremo un momento sul caso particolare dei sistemi dinamici con un solo grado di libertà. Essendo q l'unica coordinata lagrangiana; $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$; $T = \frac{1}{2} A \dot{q}^2$ la forza viva, con A funzione positiva di q; $U(q)$ la funzione delle forze, avremo il momento

$$p = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = A\dot{q}, \tag{12}$$

e per conseguenza l'espressione canonica dell'energia

$$H = \frac{1}{2A} p^2 - U(q). \tag{13}$$

È ben noto [17] che, ove q sia inizialmente compreso fra due radici semplici q', q'' dell'equazione

$$U = E,$$

il moto è periodico. Le traiettorie, nel piano cartesiano p, q delle fasi, sono le curve chiuse

$$H = E.$$

Il sistema è manifestamente quasi-ergodico perchè le traiettorie di data energia E, in questo caso, coincidono addirittura colle varietà isoenergetiche $H = E$, cosicchè le riempiono tutte (senza lacune durante un solo periodo).

L'invariante di Gibbs-Hertz è il volume, in questo caso l'area, V racchiusa da $H = E$.

Risguardando p come funzione (a due valori) di q definita dall'equazione quadratica $H = E$, l'espressione di V può essere posta sotto la forma

$$V = \oint p\,dq, \tag{14}$$

dove il segno $\circ$ sta ad indicare che l'integrale va esteso alla curva chiusa $H = E$, con che, in quanto per l'espressione (13) di H, la curva risulta simmetrica rispetto all'asse delle q, si può anche scrivere

$$V = 2\int_{q'}^{q''} p\,dq,$$

p designando la radice positiva della equazione quadratica $H = E$. Se si introduce nella (14) il tempo t come variabile indipendente e si indica con τ il periodo del moto, si ha manifestamente $V = \int_0^\tau p\dot{q}\,dt$, e siccome $p\dot{q}$ si identifica col doppio $2T$ della forza viva si ha altresì

$$V = \int_0^\tau 2T dt. \tag{14'}$$

Nel secondo membro si riconosce *l'azione* maupertuisiana [18] relativa ad un periodo del moto: essa è adunque, al pari di V, un invariante adiabatico.

Introducendo il valore medio $\overline{T}$ della forza viva relativo ad un periodo, nonchè la frequenza $\nu = \frac{1}{\tau}$, si ha ancora

$$V = 2\overline{T}\tau = \frac{2\overline{T}}{\nu}. \tag{14''}$$

---

[17] Cfr. per es. Levi-Civita e Amaldi - *Lezioni di meccanica razionale.* Bologna, Zanichelli, vol. $(\mathrm{II})_1$, cap. I, § 6.
[18] Ibidem, vol. $(\mathrm{II})_2$, cap. II, n. 13.

Nel caso di un oscillatore (punto materiale soggetto a forza elastica di richiamo) si può ritenere nella (13) $A = 1$, $U = -\frac{1}{2}\,\omega^2 q^2$, assumendo per esempio come unitaria la massa del mobile, designandone con q l'ascissa e indicando con ω^2 il coefficiente costante della forza di richiamo. Tutti i moti così definiti sono armonici colla costante di frequenza ω, risultando in conformità

$$q = r\cos(\omega t + \vartheta_0),$$

dove r (> 0) e ϑ_0 rappresentano le costanti di integrazione.

Nel piano p, q delle fasi le curve isoenergetiche sono le ellissi

$$\frac{1}{2}\,p^2 + \frac{1}{2}\,\omega^2 q^2 = E$$

e si ha quindi per l'area racchiusa

$$V = \frac{2\pi E}{\omega}.$$

Come si vede, non è l'energia totale E dell'oscillatore che ha carattere invariante di fronte alle influenze adiabatiche, bensì il rapporto fra energia e frequenza.

Ciò poteva del resto desumersi anche dalla (14″), tenendo presente che, nel caso di un oscillatore, i valori medi dell'energia cinetica e di quella potenziale sono eguali tra loro, e ciascuno a $\frac{1}{2}\,E$; essendo d'altra parte $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

Per il pendolo semplice, se si assume al solito come coordinata lagrangiana q la deviazione ϑ dalla verticale, si ha, dalla denifizione di T e dall'integrale delle forze vive,

$$T = \frac{1}{2}\,l^2\dot{\vartheta}^2 = E + gl\,\cos\vartheta,$$

designandosi con g l'accelerazione della gravità, con l la lunghezza del pendolo, e assumendo come unitaria la massa del pendolo stesso. La (14′) dà

$$V = l^2 \int_0^\tau \dot{\vartheta}^2\,dt.$$

Sostituiamovi ϑ a t come variabile d'integrazione, indicando con $-\vartheta_0$ e ϑ_0 gli estremi di una oscillazione semplice (corrispondente cioè a mezzo periodo), i quali sono definiti in funzione di E, g, l dall'equazione

$$E + gl\cos\vartheta_0 = 0. \tag{15}$$

Potremo scrivere

$$V = 2l^2 \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \dot{\vartheta}\,d\vartheta = 2\sqrt{2}l \int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \sqrt{E + gl\cos\vartheta}\,d\vartheta. \tag{16}$$

Ne viene ([19])

$$\frac{\partial V}{\partial E} = 2\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\dot\vartheta} = \tau. \tag{17}$$

Per $E = -gl$ si ha in particolare $\vartheta_0 = 0$, $V = 0$.
D'altra parte, ove si ponga al solito

$$\sin\frac{\vartheta_0}{2} = k,$$

la definizione (15) di ϑ_0 dà

$$E + gl = 2glk^2,$$

e quindi, badando anche alla (17),

$$\frac{\partial V}{\partial k} = \frac{\partial V}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{\partial V}{\partial E}\,4glk = 4glk\tau.$$

Ove si ricordi il noto sviluppo di τ ([20])

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_0^\infty{}_n c_n^2 k^{2n} \qquad \left(c_0 = 1,\ c_n = \frac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.2n}\right)$$

e si tenga presente che V si annulla per $E = -gl$, cioè per $k = 0$, si ha, integrando la precedente espressione di $\frac{\partial E}{\partial k}$ da 0 a k,

$$\begin{aligned} V &= 8\pi\sqrt{l^3 g}\sum_0^\infty{}_n \frac{1}{2n+2}\,c_n^2 k^{2n+2} = \\ &= 4\pi\sqrt{l^3 g}\,k^2\sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n+1}\,c_n^2 k^{2n}. \end{aligned} \tag{17'}$$

6. *Sistemi integrabili per separazione delle variabili. Teorema del Burgers.* – Tornando oramai al caso generale e considerando quanto sia notevole e fecondo l'invariante adiabatico desunto dall'integrale delle forze vive, vien fatto naturalmente di domandarsi se analoghe deduzioni non siano possibili quando si conoscono altri integrali del sistema dinamico di cui si tratta.

([19]) Non sarà inutile notare che bisognerebbe veramente derivare rispetto ad E anche i limiti $\pm\vartheta_0$ (i quali ne dipendono), ma il contributo relativo è nullo perchè la funzione sotto il segno va a zero per $\vartheta = \pm\vartheta_0$.
([20]) Veggasi ad es. loc. cit. ([18]), cap. I, n. 38.

A questo proposito conviene anzitutto ricordare la geniale applicazione del principio di Ehrenfest, fattane subito dal Burgers ([21]) ai sistemi dello Stäckel integrabili col metodo della separazione delle variabili (e quindi per quadrature). Per tali sistemi materiali il Sommerfeld aveva introdotto con brillante successo il postulato

$$J_i = \oint p_i dq_i = \text{multiplo intero di } h/2\pi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Spetta al Burgers il merito di averne fornita una giustificazione razionale, constatando che, nel caso suddetto, i singoli integrali J sono invarianti adiabatici. Il Burgers ne diede due dimostrazioni di tipo diverso, sfruttanti l'una le proprietà differenziali, l'altra le proprietà integrali dei sistemi dello Stäckel ([22]): procedimenti entrambi ingegnosi e penetranti, di cui il secondo è anche sembrato suscettibile di qualche estensione qualitativa. Essa non si riattacca tuttavia all'indirizzo rigoroso della meccanica analitica, il quale apparairà invece il più opportuno per fornire una generalizzazione espressiva.

7. *Sistemi canonici da designarsi come imprimitivi d'ordine m, i quali ammettono oltre $H = E$, altri m integrali uniformi. Risultato negativo del Fermi.* – Riprendiamo la considerazione di un generico sistema canonico

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \; \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots, n) \tag{1}$$

a funzione carattersitica $H(p|q|a)$ indipendente dal tempo e (come al n. 3) dipendente invece in modo adiabatico da quanti si vogliono parametri a.

Supponiamo che il sistema ammetta, oltre all'integrale dell'energia

$$H = E, \tag{2}$$

altri m integrali uniformi, pure indipendenti da t,

$$F_1 = c_1, \; F_2 = c_2, \ldots, \quad F_m = c_m. \tag{18}$$

Siffatti sistemi canonici li chiameremo, per brevità, *imprimitivi d'ordine m*. L'imprimitività d'ordine zero corrisponde così all'ipotesi che esista il solo integrale uniforme dell'energia.

Per convenienza formale giova introdurre le designazioni

$$F_0 = H, \quad c_0 = E, \tag{19}$$

([21]) *Adiabatic invariants of mechanical systems*, "Phil. Mag.", volume XXXIII, 1917, pp. 514-520.

([22]) Cfr. per quest'ultima la dissertazione del BURGERS (presentata all'Università di Leida; Haarlem, 1918; in lingua olandese); ovvero BORN, loc. cit.([3]), pp. 98-148.

con che gli integrali conosciuti (2) e (18) del nostro sistema canonico si possono tutti compendiare nella formula

$$F_r = c_r, \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{20}$$

Supponiamo inoltre che le (20) definiscano nello spazio Φ_{2n} delle fasi una varietà chiusa (cioè priva di frontiera) a $2n - (m+1)$ dimensioni, che designeremo con τ; che non esistano altri integrali uniformi; e infine che quasi tutte le curve integrali, ciascuna delle quali si svolge sopra una determinata τ, siano, nel solito senso, dense sopra la corrispondente τ; ovvero verifichino una condizione alquanto meno restrittiva (d'), che sarà specificata nel prossimo n. 13.

Lasciandoci guidare dagli stessi criteri che ci hanno condotto nel n. 4 alla definizione (7) di $d_a E_l$ saremmo ora tratti a introdurre le variazioni adiabatiche delle costanti c_r sotto la forma di valori medi ([23])

$$\overline{d_a\, F_r}$$

delle dF_r, rispetto alla varietà τ (nell'ipotesi che le curve integrali la riempiano sensibilmente).

Ma, come ebbe a rilevare il Fermi ([24]), le variazioni, così definite, non sono in generale differenziali esatti rispetto ai parametri a, e lo divengono solo in circostanze molto particolari; sicchè pare escluso che sia da impostare per questa via uno studio generale degli invarianti adiabatici.

([23]) Il significato da attribuire a tali valori medi su τ è un'ovvia generalizzazione di quello specificato al n. 4 per le superficie isoenergetiche. E precisamente, detto M un punto (ordinario) della varietà τ, $d\tau$ un elemento circostante, si indichino con $z_0, z_1, \ldots, z_m$ (complessivamente con z) $m+1$ argomenti (tra le $2n$ coniugate p, q) in rapporto ai quali le (20) siano risolubili. Sarà in conformità diverso da zero il determinante funzionale

$$\Delta = \begin{pmatrix} F_0\, F_1\, \ldots\, F_m \\ z_0\, z_1\, \ldots\, z_m \end{pmatrix}.$$

Dicansi x gli altri $2n - (m+1)$ argomenti p, q; dX il prodotto dei relativi differenziali. Riguardando come $2n$ variabili indipendenti, al posto dell p, q, le x e le c, si avrà

$$dV = \frac{dX\, dc_0\, dc_1\, \ldots\, dc_m}{|\Delta|},$$

e il valore medio di una generica dF_r si definisce come il rapporto

$$\int_\tau \frac{d_a\, F_r\, dX}{|\Delta|} : \int_\tau \frac{dX}{|\Delta|}.$$

([24]) *Alcuni teoremi di meccanica analitica importanti per la teoria dei quanti*, "Nuovo Cimento", VII, vol. 25, 1923, pp. 271-285.

8. *Integrali elementari* $p_r = \text{cost}$. *Conseguente riduzione del sistema canonico. Invariante adiabatico fornito dal volume ridotto.* – Fissiamo per un momento l'attenzione sul caso tipico in cui alcune delle coordinate lagrangiane, diciamo per es.

$$q_1,\, q_2\, \ldots,\, q_m,$$

sono *cicliche*, o, come suol anche dirsi, *ignorabili*, nel senso che non compariscono nella espressione dell'energia H. Essendo allora

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1,\, 2, \ldots,\, m),$$

le prime m equazioni canoniche (1) danno appunto gli m integrali

$$p_r = \text{cost.} = c_r \qquad (r = 1,\, 2, \ldots,\, m). \tag{21}$$

Tenendone conto, le rimanenti equazioni (1) si scindono in due gruppi:

a) Il sistema canonico, nei $2(n-m)$ argomenti coniugati

$$\begin{pmatrix} p_{m+1} \cdots p_n \\ q_{m+1} \cdots q_n \end{pmatrix},$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i},\ \ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad (i = m+1, \ldots,\, n), \tag{22}$$

in cui, per mettere in evidenza che le p_r vanno sostituite coi loro valori costanti c_r, ho scritto, in luogo di H,

$$\mathcal{H} = (H)_{p_r = c_r}. \tag{23}$$

b) Le rimanenti m equazioni

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_r} \qquad (r = 1,\, 2, \ldots,\, m), \tag{24}$$

il cui ufficio è unicamente quello di fornire (per quadrature) l'espressione temporale delle coordinate ignorabili q_r, una volta integrato il sistema canonico ridotto (22). In questo le c si possono trattare alla stessa stregua dei parametri a (che già comparivano nella orginaria H).

Purchè soltanto le varietà isoenergetiche del sistema ridotto (22)

$$\mathcal{H} = E$$

siano superficie chiuse a $2(n-m)-1$ dimensioni dello spazio Ψ delle p_i, q_i $(i > m)$, il volume W da esse delimitato è un invariante adiabatico di fronte a variazioni lente quali si vogliono di tutti i parametri a, c ed E.

9. *Generalizzazione del risultato precedente suggerita dalla teoria delle trasformazioni canoniche.* – Se gli integrali conosciuti (18), pur senza avere la forma particolare $p_r =$ cost., sono fra loro in involuzione, ossia se si annullano le $\frac{m(m-1)}{2}$ parentesi di Poisson

$$(F_r,\, F_s) \qquad\qquad (r,\, s\, =\, 1,\, 2, \ldots,\, m),$$

è sempre possibile (25) ricondursi al caso elementare anzidetto mediante una trasformazione canonica, introducendo cioè, al posto degli argomenti originari p_i, q_i, $2n$ loro combinazioni indipendenti P_i, Q_i, di cui le prime m P si identificano con le $F_r(p|q)$, risultando altresì soddisfatta la condizione di canonicità

$$\sum_1^n{}_i\, P_i dQ_i = \sum_1^n{}_i\, p_i\, dq_i + \text{differenziale esatto.}$$

Questa assicura che, nelle nuove variabili P, Q, le equazioni differenziali (1) conservano la forma canonica colla stessa funzione caratteristica H (espressa per le P, Q, anzichè per le p, q. E il sistema ammette, per costruzione, gli m integrali elementari

$$P_r = c_r.$$

Soddisfatta che sia la condizione qualitativa concernente la chiusura delle varietà

$$\mathcal{H} = (H)_{p_r = c_r} = E \tag{25}$$

nello spazio dei $2(n-m)$ argomenti P_i, $Q_i (i > m)$ — e ciò dà luogo ad osservazioni su cui intratterremo tra un momento — *il volume W del campo delimitato da $\mathcal{H} = E$ in detto spazio costituisce un invariante adiabatico di fronte a variazioni lente quali si vogliono dei parametri a, nonchè delle costanti di integrazione E e c.*

Di tale invariante rimane dunque — specificazioni qualitative a parte — dimostrata l'esistenza per ogni canonico imprimitivo d'ordine m.

10. *Considerazioni critiche. Necessità analitica e costruttiva di riportare il risultato alle originarie variabili. Cenno della via da tenere.* – Per quanto teoricamente possibile, l'introduzione di nuove variabili canoniche $(P_i,\, Q_i)$, di cui le prime m P coincidono colle F_r, dà luogo a varie osservazioni:

1°) Anzitutto essa dipende da operazioni analitiche di ordine elevato; generalmente più elevato che l'integrazione del sistema canonico, di cui si conoscono gli integrali in involuzione $F_r = c_r$.

(25) Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, B. II. Leipzig, Trubner, 1980, Cap. X, pag. 207-209.

2°) Mentre le originarie variabili p, q sono, per ipotesi, in corrispondenza biunivoca colle fasi (atti di moto) del sistema meccanico, non può affermarsi a priori che lo stesso segua delle P, Q, in quanto queste (fatta eccezione per le P_r scelte eguali alle F_r) saranno in generale funzioni *non* uniformi delle p, q.

Perciò, mentre *localmente* si conservano i caratteri topologici, passando dallo spazio rappresentativo delle $(p,\, q)$ a quello delle $(P,\, Q)$, non è detto che lo stesso segua in tutto il campo delle $(p,\, q)$ che occorre prendere in considerazione. Per es. è possibile che la proprietà di certe curve di riempire *praticamente* delle varietà non abbia carattere invariantivo quando si operano trasformazioni non uniformi, ecc.

3°) È vero d'altra parte che, per la natura specifica della trasformazione canonica fra le $(p,\, q)$ e le $(P,\, Q)$, le varietà isoenergetiche (ridotte) τ di equazione

$$\mathcal{H} = (H)_{p_r=c_r} = E, \tag{25}$$

rispetto alle variabili ausiliare $P_{m+1}, \dots, P_n,\ Q_{m+1}, \dots, Q_n$, si possono anche definire direttamente rispetto alle variabili originarie, mediante le $m+1$ equazioni (uniformi)

$$F_r = c_r, \quad H = E\,,$$

o, ciò che è lo stesso, mediante le (20) del n. 7.

Tuttavia, nello spazio delle fasi Φ_{2n} delle $(p,\, q)$, tali $m+1$ equazioni determinano una varietà $2n-(m+1)$ dimensioni, e non si vede che cosa sia geometricamente l'invariante W, il quale, nello spazio dei $2(n-m)$ argomenti $P_{m+1}, \dots,\, P_n,\, Q_{m+1}, \dots,\, Q_n$, è il volume racchiuso da una superficie (25).

Per renderci conto preciso delle difficoltà, immaginiamo (ciò che non costituisce restrizione sostanziale) che gli m integrali indipendenti (18)

$$F_r = c_r, \qquad (r = 1,\, 2, \dots,\, m)$$

siano risolubili rispetto a $p_1,\, p_2, \dots,\, p_m$, fornendo questi m argomenti, in funzione dei rimanenti (nonchè delle c e dei parametri a) sotto forma

$$p_r = f_r \qquad (r = 1,\, 2, \dots,\, m). \tag{18$'$}$$

Le equazioni (20) della varietà τ, nello spazio Φ_{2n} delle fasi, si riducono, quando si prescinda dalle $p_1,\, p_2, \dots,\, p_m$, si consideri cioè uno spazio ausiliario Φ' a $2n-m$ dimensioni rappresentativo degli argomenti

$$p_{m+1}, \dots,\, p_n; \quad q_1,\, q_2, \dots,\, q_n,$$

all'unica equazione

$$(H)_{p_r=f_r} = E, \tag{25$'$}$$

che rappresenta una superficie (varietà a $2n-(m+1)$ dimensioni) in Φ'. Ma bisognerebbe ulteriormente liberarsi da m dimensioni, ossia, sotto l'aspetto formale, da m

argomenti, ciò che si fa automaticamente attraverso la trasformazione canonica, rimanendone condotti a prescindere dalle m coordinate ignorabili $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, coniugate alle $P_r = F_r$.

Soltanto superando in qualche modo una tale difficoltà, si potrebbe poi abbassare di m unità la dimensione di una varietà (25′), in modo che essa si presenti quale superficie in uno spazio $\varPsi$ a $2(n-m)$ dimensioni. E allora, salvo specificazioni qualitative e riconoscimento della metrica da attribuirsi allo spazio ridotto $\varPsi$, diverrebbe legittimo parlare di volume W racchiuso da una superficie (25′), e si avrebbe in esso l'invariante adiabatico suggerito dalla trasformazione canonica.

In definitiva, attenendosi alla via indicata, la stessa dimostrazione di esistenza dell'invariante adiabatico W non riesce esauriente perchè vi intervengono trasformazioni in generale non uniformi in tutto il campo che occorre investigare, le quali trasformazioni possono alterare taluno dei caratteri topologici di cui è d'uopo tener conto. D'altra parte, anche se si passasse sopra a tale deficienza, ritenendo come in realtà è, che la trasformazione renda per lo meno assai plausibile il teorema d'esistenza, rimane il lato costruttivo, il quale, come si è or ora rilevato, sembra richiedere la preventiva determinazione delle combinazioni ignorabili

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$$

e quindi operazioni differenziali che possono eessere elevate, mentre è desiderabile pervenire all'espressione esplicita di W nel modo più semplice possibile, il quale implica, come vedremo, soltanto una quadratura.

Dobbiamo pertanto cercare di caratterizzare direttamente (si vuol dire senza trasformazioni ausiliarie) l'invariante adiabatico W.

In tale indagine si presenterà come fondamentale un procedimento dovuto al Morera ([26]), il quale già ne trasse una rapida dimostrazione del teorema di Lie sulla riduzione dei sistemi canonici. Per lo scopo che abbiamo in vista modificheremo alquanto il procedimento, rendendo anche più spontanea l'introduzione di quel certo sistema ai differenziali totali completamente integrabile, che consente, come mostrò il Morera, agile discussione delle questioni di riducibilità.

11. *Nuovo aspetto del teorema del Lie sulle riduzione dei sistemi canonici. Sistema associato* (A_0) *ai differenziali totali* – Poniamoci nelle condizioni ripetutamente enunciate, riferendoci ad un sistema imprimitivo d'ordine m (n. 7), cioè ad un sistema canonico (1), del quale, essendo la funzione caratteristica H indipendente da t, si conoscono, oltre all'integrale dell'energia

$$H = E, \tag{2}$$

m integrali

([26]) *Intorno ai sistemi di equazioni a derivate parziali del I° ordine in involuzione.* "Rend. del R. Ist. Lombardo", vol. XXXVI, 1903, pp. 775-790.

$$F_r = c_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, m), \tag{18}$$

pure indipendenti da t ed in involuzione tra di loro.

Notoriamente ([27]) quest'ultima circostanza seguita a sussistere anche se si assumono le (18) sotto la forma risoluta

$$p_r = f_r, \qquad (r = 1, 2, \dots, m), \tag{18$'$}$$

e si traduce formalmente nelle identità

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_s} - \frac{\partial f_s}{\partial q_r} + \{f_r,\, f_s\} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \dots, m), \tag{26}$$

dove il simbolo { } sta a designare una parentesi del Poisson, limitata agli argomenti

$$\begin{pmatrix} p_{m+1} & \cdots & p_n \\ q_{m+1} & \cdots & q_n \end{pmatrix}.$$

Il fatto che le (18) sono altrettanti integrali del sistema canonico (1), e quindi le (18$'$) relazioni invarianti, implica che le parentesi $(H,\, p_r - f_r)$ si annullino, tenuto conto delle (18$'$) stesse.

Introducendo la funzione caratteristica ridotta

$$\mathcal{H}(p_{m+1}, \dots, p_n|q) = (H)_{p_r = f_r},$$

e tenendo conto che la derivata parziale di H rispetto ad un generico argomento x (sia questo una delle p_i d'indice $> m$, una generica q, una a o una c) vale

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} + \sum_1^m{}_r \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial f_r}{\partial x}, \tag{27}$$

si arriva, con ovvie trasformazioni materiali ([28]), a riconoscere che sussistono (identicamente, rispetto a tutti gli argomenti che vi compariscono) le relazioni

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} + \{\mathcal{H}, f_r\} = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, m). \tag{28}$$

Tutto ciò premesso, torniamo alle equazioni differenziali

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

([27]) Cfr. per es. loc. cit. ([17]), vol, $(\mathrm{II})_2$, cap. X, n. 29.
([28]) Ibidem, n. 30.

Le prime m del primo gruppo si possono tralasciare senz'altro risguardandole sostituite dagli m integrali, anzi addirittura dalle $(18')$ che esprimono in termini finiti $p_1, p_2, \ldots, p_m$, in funzione delle altre incognite $p_{m+1}, \ldots, p_n$; $q_1, \ldots, q_n$ (delle costanti c e dei parametri a).

Le rimanenti $2n-m$ equazioni (1) si possono scindere in due gruppi, rispettivamente di $2(n-m)$ e di m equazioni, scrivendo:

$$\tag{29} \begin{cases} dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt, \\ dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt \qquad (i = m+1, \ldots, n); \end{cases}$$

$$\tag{30} dq_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}\,dt \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Se nei secondi membri delle (29) si introducono, al posto delle derivate di H, le loro espressioni (27) per mezzo delle derivate corrispondenti della funzione ridotta $\mathcal{H}$, e si bada alle (30), si può attribuire alle (29) stesse la forma equivalente

$$\tag{A_0} \begin{cases} dp_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\,dt + \sum_1^m {}_r \frac{\partial f_r}{\partial p_i}\,dq_r, \\ dq_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\,dt - \sum_1^m {}_r \frac{\partial f_r}{\partial p_i}\,dq_r, \qquad (i = m+1, \ldots, n). \end{cases}$$

Queste, associate alla (30), formano complessivamente, come già le (29), (30), un sistema differenziale ordinario di rango $2n-m$. Ma si dà la circostanza singolarmente favorevole che *da sole le* (A_0) *costituiscono un sistema ai differenziali totali illimitatamente integrabile, nelle funzioni incognite* p_i, q_i $(i > m)$ *delle variabili, risguardate indipendenti,* t, $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Questo si dirà *sistema associato* dell'originario sistema imprimitivo d'ordine m, con riguardo ai suoi m integrali in involuzione (18), o, ciò che è lo stesso alle $(18')$.

Le condizioni di illimitata integrabilità di (A_0) sono appunto espresse, come si potrebbe verificare in modo ovvio ([29]), dalle (26) e (28) che traducono formalmente le nostre ipotesi. Questo consente di considerare isolatamente il sistema (A_0) nelle $2(n-m)$ funzioni incognite p_i, q_i $(i > m)$, il quale, essendo completamente integrabile, può ricondursi ad un sistema differenziale di rango $2(n-m)$.

Una volta integrato il sistema (A_0) e conseguite quindi le funzioni p_i, $q_i (i > m)$ delle t, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ ([30]), basta pensarvi le $q_1, q_2, \ldots, q_m$, non più come variabili indipendenti, ma come funzioni di t soddisfacenti alle (30) per avere in sostanza assegnato l'integrale generale dell'originario sistema canonico. Per caratterizzare tali funzioni

---

([29]) Chi volesse qualche ragguaglio sulla teoria generale dei sistemi ai differenziali totali può consultare le nostre *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, raccolte dal Prof. E. Persico, Roma, Stock, 1925, cap. II.

([30]) Tali funzioni p_i, q_i dipenderanno altresì da $2(n-m)$ costanti di integrazione, e precisamente dai valori iniziali (arbitrari, almeno entro un certo campo) p_i^0, q_i^0 che si vogliono attribuire alle p_i, $q_i (i > m)$, in corrispondenza a valori iniziali pure arbitrari t_0, $q_1^0, \ldots, q_m^0$ delle variabili indipendenti t, $q_1, \ldots, q_m$.

$q_r(t)(r = 1, 2, \ldots, m)$ in modo da verificare anche le (30), tutto si riduce manifestamente a sostituire nei secondi membri delle (30) stesse, al posto delle p_i, q_i, $(i > m)$, le loro espressioni in funzione delle t, q_1, $q_2, \ldots$, q_m risultanti dall'integrazione del sistema (A_0), con che la determinazione delle $q_r(t)$ viene a dipendere da un sistema differenziale ordinario di rango m, e sembra quindi richiedere un'operazione di quest'ordine. In realtà si potrebbe ancora riconoscere che, ricorrendo al metodo di Jacobi per l'integrazione delle (A_0), vien fatto di risparmiare l'ultima operazione di rango m, sostituendola con una semplice quadratura. Ma ciò non ha interesse per l'attuale nostro scopo, mentre importa rilevare che ogni integrale del sistema ai differenziali totali (A_0) (in cui le q_r si risguardano come variabili indipendenti assieme alla t) lo è a fortiori per il sistema differenziale ordinario costituito complessivamente dalle (A_0) e dalle (30), e quindi anche per l'originario sistema canonico (in cui le q_r vanno considerate quali convenienti funzioni di t). Non solo, ma lo stesso fatto, che da (A_0) si può senz'altro risalire al sistema canonico, vale anche per eventuali invarianti integrali del sistema (A_0).

Diamo intanto un esempio della prima osservazione, riservandoci di illustrare al n. seguente la seconda, che si collega come mostreremo subito dopo, nel modo più diretto ed espressivo, alla teoria degli invarianti adiabatici.

L'integrale del sistema ai differenziali totali (A_0) che vogliamo intanto segnalare non è altro che quello dell'energia [ridotta a mezzo degli altri integrali conosciuti (18) o (18′)]

$$\mathcal{H} = E. \tag{25'}$$

Per riconoscere che si tratta effettivamente di un integrale di (A_0) occorre e basta verificare che

$$d\mathcal{H} = \sum_{m+1}^{n}{}_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i \right) + \sum_{1}^{m}{}_r \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r} dq_r,$$

quando vi si sostituiscono le espressioni (A_0) delle dp_i, dq_i, va a zero per qualunque determinazione dei differenziali dt, dq_r delle variabili indipendenti. Che ciò sia segue senz'altro dalle (28). In questo esempio particolare il ritorno al sistema differenziale ordinario non dà nulla di nuovo riportando appunto all'integrale (ridotto) dell'energia.

12. *Lo spazio Ψ a $2(n-m)$ dimensioni delle fasi p_i, $q_i (i > m)$. Il corrispondente volume euclideo quale invariante integrale del sistema (A_0). Applicazione al volume W_0 racchiuso in Ψ da una $\mathcal{H} = E$.* – Consideriamo una soluzione generica

$$\begin{cases} p_i = p_i(t|q_1, q_2, \ldots, q_m) \\ q_i = q_i(t|q_1, q_2, \ldots, q_m) \qquad (i = m+1, m+2, \ldots, n) \end{cases} \tag{31}$$

del sistema ai differenziali totali (A_0), illimitatamente integrabile, e rappresentiamo separatamente le determinazioni t, $q_1, \ldots$, q_m delle variabili indipendenti quali punti P di uno spazio Σ a $m+1$ dimensioni, le determinazioni p_i, q_i delle funzioni quali punti M di un'altro spazio Ψ a $2(n-m)$ dimensioni (spazio delle fasi, ridotto). Alle (31) equivale il fatto geometrico che M è funzione di P, univocamente determinata (come, sotto aspetto analitico, abbiamo avuto occasione di ricordare al n. precedente), tostochè sia assegnata la posizione M_0 di M che corrisponde ad un particolare punto P_0. Potremo scrivere immaginando sottinteso P_0,

$$M = M(P|M_0). \tag{31'}$$

Con queste immagini geometriche diviene agevole il caratterizzare a parole un tipico invariante integrale (a $2(n-m)$ dimensioni) spettante a qualsiasi sistema (A_0). Ecco di che si tratta.

Si fissi arbitrariamente (nell'ambito di valori in cui il sistema (A_0) si comporta regolarmente) una porzione finita C_0 di Ψ, sia M_0 un suo punto generico. Consideriamo le soluzioni (31′) definite dai singoli punti M_0 di C_0 (risguardati quali iniziali, cioè assunti per un P_0 prefissato). Immaginiamo di far variare P a partire da P_0, sempre restando nell'ambito di regolarità delle (A_0).

Ad ogni P siffatto rimane subordinato un campo C di Ψ, luogo delle posizioni dei punti M che, inizialmente, occupavano C_0.

Dico che il volume W_0 spettante a C, in quanto si attribuisca allo spazio Ψ metrica euclidea, è indipendente da P. Si ha cioè in

$$W_0 = \int_C dp_{m+1} \dots dp_n \, dq_{m+1} \dots dq_n \tag{32}$$

un invariante integrale del sistema ai differenziali totali (A_0).

Per giustificarlo comincerò, ad evitare ambiguità, col sostituire ∂ a d nei differenziali che stanno sotto il segno dell'integrale multiplo, riservando il simbolo d per i differenziali che si riferiscono al sistema (A_0), sia delle variabili indipendenti t, q_1, $q_2, \dots, q_m$, sia delle funzioni p_i, q_i $(i > m)$.

Qualunque sia il campo iniziale C_0, il secondo membro della (32) diviene, a integrazione eseguita, funzione bene determinata di P, cioè di t, q_1, $q_2, \dots, q_m$. Si tratta di stabilire che tale funzione si riduce ad una costante, cioè che il suo differenziale dW è zero. Attesa l'espressione (32) di W_0, la quale, ponendo per brevità

$$\partial C = \partial p_{m+1} \dots \partial p_n \, \partial q_{m+1} \dots \partial q_n, \tag{33}$$

può essere scritta

$$W_0 = \int_C \partial C, \tag{32'}$$

si ha, col solito algoritmo,

$$dW_0 = \int_C \partial C \sum_{m+1}^{n} {}_i \left(\frac{d\partial p_i}{\partial p_i} + \frac{d\partial q_i}{\partial q_i} \right),$$

dove tutto va formalmente come se i rapporti

$$\frac{d\partial p_i}{\partial p_i} = \frac{\partial dp_i}{\partial p_i}, \quad \frac{d\partial q_i}{\partial q_i} = \frac{\partial dq_i}{\partial q_i},$$

stessero a significare le corrispondenti derivate parziali

$$\frac{\partial (dp_i)}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial (dq_i)}{\partial q_i}.$$

Le dp_i, dq_i devono ritenersi sostituite colle loro espressioni (A_0). Attesa la forma canonica (rispetto a ciascuna delle variabili indipendenti) dei differenziali dp_i, dq_i, forniti dalle (A_0), ogni binomio

$$\frac{\partial dp_i}{\partial p_i} + \frac{\partial dq_i}{\partial q_i}$$

si annulla, e con esso W_0, c.d.d.

Aggiungiamo ora l'ipotesi qualitativa che, per una determinazione generica delle $q_1, q_2, \ldots, q_m$ (ometto la t, la quale per dato non entra mai esplicitamente), le superficie isoenergetiche (ridotte)

$$\mathcal{H} = E \tag{25'}$$

siano chiuse nello spazio Ψ delle $p_{m+1}, \ldots, p_n$; $q_{m+1} \ldots, q_n$, pur potendo in generale variare con $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Indichiamo in conformità con σ una ben determinata di queste superficie chiuse, che dovrà pensarsi dipendente dalle $q_1, q_2, \ldots, q_m$, nonchè, al solito, da E, dalle c e dalle a. Per essere $\mathcal{H} = E$ integrale del sistema (A_0) ogni punto M che appartiene a σ inizialmente, ossia per una qualche determinazione dalle $q_1, q_2, \ldots, q_m$, vi appartiene per qualsiasi altra determinazione. Perciò il campo C racchiuso da una σ (che, anch'esso, varierà in generale colle $q_1, q_2, \ldots, q_m$) rimane sempre il corrispondente, nel senso specificato in principio di questo n., della sua determinazione iniziale. Ma il volume di tale campo è un invariante integrale, dunque si ha l'importante corollario che *il volume* (euclideo) W_0 *racchiuso, nello spazio* Ψ *delle* p_i, q_i $(i > m)$, *da una generica* σ *di equazione*

$$\mathcal{H} = E$$

è (a differenza della σ stessa) *indipendente dalle* $q_1, q_2, \ldots, q_m$, *e quindi funzione soltanto delle costanti di integrazione* E *e* c, *nonchè dei parametri* a (che eventualmente figurano nella funzione caratteristica H dell'assegnato sistema canonico).

13. *Ipotesi più lata concernente la densità delle curve integrali. Proprietà fondamentali di* W_0 *di essere invariante adiabatico.* – L'interesse essenziale delle precedenti considerazioni sta nel fatto che, come già il volume $2n$-dimensionale V per i sistemi quasi ergodici,

così per i sistemi canonici (1) imprimitivi di ordine m, il volume $2(n-m)$-dimensionale W_0 è un *invariante adiabatico.*

La verificazione è immediata, sempreché si supponga (cfr. n. 7) che *quasi* tutte le curve integrali del sistema canonico siano dense:

d) sulla varietà τ a $2n-(m+1)$ dimensioni definita complessivamente dalle $H = E$, $F_r = c_r$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$, ossia, più simmetricamente, dalle

$$F_r = c_r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, m); \tag{20}$$

o anche soltanto (è questa la condizione meno restrittiva di cui si fece cenno al n. 7)

d') sopra una qualunque delle varietà σ a $2(n-m)-1$ dimensioni $H = E$, di Ψ, le quali si ottengono attribuendo, in H, alle $q_1, q_2, \ldots, q_m$ determinazioni arbitrarie (costanti, o magari anche funzioni di t).

Naturalmente, se è verificata *d*), lo è in particolare *d'*), ma non viceversa.

Comunque, attesa la proprietà fondamentale (n. prec.) dell'invariante integrale W_0 di essere indipendente dalle $q_1, q_2, \ldots, q_m$, si è in grado, appoggiandosi su *d'*) di ripetere identicamente, per il volume $2(n-m)$-dimensionale W_0 in Ψ il ragionamento sviluppato al n. 4 a proposito del volume $2n$-dimensionale V in Φ_{2n}.

E così rimane acquisita l'annunciata invarianza adiabatica di W_0.

14. *I vari sistemi associati* (A_α) $(\alpha = 0, 1, \ldots, m)$. *Proprietà comuni. Corollari.* – Per il sistema canonico (1) imprimitivo d'ordine m sussistono le m equazioni di condizione

$$(H, F_r) = 0 \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

in quanto si suppone che le $F_r = c_r$ siano altrettanti integrali, e inoltre le $\frac{m(m-1)}{2}$

$$(F_r, F_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m)$$

per l'ipotesi che le F stesse siano in involuzione. Colle posizioni (19) del n. 7 ($F_0 = H$, $c_0 = E$) i due gruppi si compendiano nell'unico schema

$$(F_r, F_s) = 0 \qquad (r, s = 0, 1, \ldots, m), \tag{33}$$

in cui tutte le F si comportano nello stesso modo.

Noi vi siamo pervenuti esprimendo le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un sistema canonico di funzione caratteristica F_0 (indipendente da t) ammetta gli m integrali in involuzione (pure indipendenti da t) corrispondenti alle rimanenti F. Ma, attesa la completa simmetria, si può attribuire l'ufficio di F_0 ad una generica altra F, diciamo per es.

$$F_\alpha,$$

e affermare che ad ogni sistema imprimitivo di ordine m se ne possono collegare altri m, aventi rispettivamente per funzione caratteristica F_1; F_2; $\ldots$; F_m e, ciascuna volta, le rimanenti F come integrali in involuzione. Per ognuno di questi sistemi differenziali ordinari si ha (sotto specificazioni qualitative di regolarità, risolubilità, ecc.) un sistema associato (A_α) ai differenziali totali, costruito secondo il criterio del n. 11. Atteso il diverso algoritmo costruttivo, i vari (A_α) riescono in generale diversi l'uno dall'altro. Però la differenza non è così profonda come a priori potrebbe pensarsi: *questi sistemi associati* (A_α) *ammettono tutti — lo mostreremo tra un momento — gli stessi* $2(n-m)-1$ *integrali esenti da* t. In altri termini le $2(n-m)$ espressioni (31) delle $p_i\, q_i$ $(i > m)$ che da essi si traggono per integrazione, se proprio non coincidono, danno luogo, quando se ne elimini t, alle stesse $2(n-m)-1$ conseguenze.

Per stabilire tale proprietà considereremo insieme i suddetti $2(n-m)-1$ integrali indipendenti da t di un generico sistema (A_α), l'(A_0) del n. 11 per fissare le idee, e le m equazioni

$$p_r = f_r \tag{18'}$$

che definiscono, si può dire, le $p_1, p_2, \ldots, p_m$, o ciò che è lo stesso, le equivalenti

$$F_r = c_r \qquad (r = 0, 1, \ldots, m), \tag{18}$$

mostrando che questo complesso di $2n-(m+1)$ integrali si identifica con quello definito dal sistema jacobiano

$$(F_r, F) = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, m), \tag{34}$$

il quale sistema, simmetrico rispetto a tutte le $m+1$ F, possiede precisamente $2n-(m+1)$ integrali F indipendenti tra loro.

All'uopo prendiamo le mosse della seguente osservazione di carattere generale: siano $F_1, F_2, \ldots, F_m$; $G_1, G_2, \ldots, G_\mu$ due grupppi di funzioni indipendenti di $2n$ variabili coniugate p_i, $q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, tutte in involuzione tra loro, il che è formalmente espresso da

$$(F_r, F_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m); \tag{35}$$

$$(F_r, G_j) = 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, \mu); \tag{36}$$

$$(G_j, G_l) = 0 \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{37}$$

Suppongasi che (c_r designando delle costanti) le m equazioni

$$F_r = c_r$$

siano risolubili rispetto ad altrettante p — le prime m — sotto la forma

$$p_r = f_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{18'}$$

Per un lemma noto, già ricordato al n. 11, citaz.([27]), le (35) implicano

$$(35') \qquad (p_r - f_r,\, p_s - f_s) = 0 \qquad (r, s = 1,\, 2, \dots,\, m),$$

e le (36)

$$(36') \qquad (p_r - f_r,\, G_j) = 0 \quad (r = 1,\, 2, \dots,\, m;\; j = 1,\, 2, \dots,\, \mu),$$

le prime risultando soddisfatte identicamente (a parentesi calcolate), e le seconde coll'intesa che ogni eventuale p_r superstite ($r = 1,\, 2, \dots,\, m$) venga sostituita da f_r. Ciò posto, dicasi $\mathcal{G}$ ciò che diviene una generica G, ridotta a mezzo delle (18) [o (18′)], pongasi cioè

$$\mathcal{G}_j = (G_j)_{p_r = f_r} \qquad (j = 1,\, 2, \dots,\, \mu).$$

Se x designa uno qualsiasi degli argomenti $p_{m+1}, \dots, p_n;\, q_1\, q_2, \dots, q_n$, si ha [come per $\mathcal{H}$ al n.11 ; cfr. equazione (27)]

$$\frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial x} = \frac{\partial G_j}{\partial x} + \sum_1^m{}_s \frac{\partial G_j}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial x}$$

che si può scrivere, finchè x è diverso da una delle p_s,

$$(38) \qquad \frac{\partial G_j}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial x} + \sum_1^m{}_s \frac{\partial G_j}{\partial p_s}\frac{\partial (p_s - f_s)}{\partial x}.$$

Ma questa vale anche per x coincidente con una delle $p_1,\, p_2, \dots,\, p_m$, per es. p_r, poichè in tal caso si riduce all'identità

$$\frac{\partial G_j}{\partial p_r} = \frac{\partial G_j}{\partial p_r}.$$

Colle espressioni (38) delle derivate di una G_j (rispetto ad uno qualsiasi dei $2n$ argomenti $p_i,\, q_i$), le (36′), avuto riguardo alle (35′), divengono

$$(36'') \qquad (p_r - f_r,\, \mathcal{G}) = 0$$

colla solita intesa riguardo alle superstiti $p_1,\, p_2, \dots,\, p_m$. Ma, sviluppando la parentesi, rimane l'analogo della equazione (28) per la $\mathcal{H}$, cioè

$$(36''') \qquad \frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial q_r} + \{\mathcal{G}_j,\, f_r\} = 0 \quad (r = 1,\, 2, \dots,\, m;\; j = 1,\, 2, \dots\, \mu),$$

e qui si tratta ancora di identità, poichè non vi apparisce più alcuna delle $p_1,\, p_2, \dots,\, p_m$.

Usando di nuovo le (38) e avendo riguardo alle (36″) e (35′), le (37) assumono la forma ridotta

$$(37') \qquad (\mathcal{G}_j,\, \mathcal{G}_l) = 0 \qquad (j,\, l = 1,\, 2, \ldots,\, \mu),$$

o, se si vuole, mancandone le $p_1,\, p_2, \ldots,\, p_m$,

$$(37'') \qquad \{\mathcal{G}_j,\, \mathcal{G}_l\} = 0 \qquad (j,\, l = 1,\, 2, \ldots,\, \mu).$$

Traendo partito da queste equivalenze formali è ora assai agevole accertare che, per ogni soluzione F delle (34), la relazione $F =$ cost., previa riduzione a mezzo delle (18′), ossia

$$\mathcal{F} = (F)_{p_r = f_r} = \text{cost.},$$

costituisce effettivamente un integrale (esente da t) del sistema (A_0) coordinato ad F_0 secondo la costruzione del n. 11.

Per gli altri (A_α) varrà poi naturalmente la stessa dimostrazione, salvo una sostituzione circolare sugli indici 0, 1, …, m delle F, con tutte le sue conseguenze.

Ecco la dimostrazione.

Le (34), associate alle (20), esprimono complessivamente che le $m + 2$ funzioni

$$F_1,\, F_2 \ldots,\, F_m; \quad F_0 = H,\, F$$

sono in involuzione tra loro.

Trattando le ultime due alla stregua delle G di poc'anzi, si può senz'altro affermare che, per la $\mathcal{F}$, sussisteranno identicamente le equazioni corrispondenti a (36‴) e (37″), cioè

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_r} + \{\mathcal{F},\, f_r\} = 0 \qquad (r = 1,\, 2, \ldots,\, m),$$
$$\{\mathcal{H},\, \mathcal{F}\} = 0.$$

Queste sono precisamente le condizioni affinchè $\mathcal{F} =$ cost. sia integrale del sistema (A_0) del n. 11, c.d.d.

Rimane pertanto provato che i vari sistemi ausiliari ai differenziali totali (A_α) $(\alpha = 0,\, 1, \ldots,\, m)$, associati alle equazioni (riducentisi alle (18) per $\alpha = 0$),

$$(39) \qquad F_0 = c_0, \ldots,\, F_{\alpha-1} = c_{\alpha-1},\, F_{\alpha+1} = c_{\alpha+1}, \ldots,\, F_m = c_m$$

ammettono gli stessi integrali, indipendenti da t, $F =$ cost.; e precisamente tutti e soli quelli definiti dal sistema jacobiano (34). Ora in questo è in ogni caso compresa l'equazione

$$(F_0,\, F) = (H,\, F) = 0.$$

Perciò tali integrali appartengono tutti anche all'originario sistema canonico.

Del resto, anche senza formule, si può giungere alla stessa conclusione combinando la proprietà fondamentale dei sistemi (A_α), testè stabilita, con una osservazione del n. 11 concernente il sistema (A_0). Infatti da un lato i vari sistemi ai differenziali totali $(A_\alpha)\,(\alpha = 0, 1, \ldots, m)$ ammettono tutti gli stessi integrali indipendenti da t; dall'altro, come fu rilevato al n. 11, ogni integrale di (A_0) spetta in particolare all'originario sistema canonico. Per conseguenza lo stesso può dirsi per un qualsiasi integrale indipendente da t di un (A_α) generico, in quanto esso appartiene pure ad (A_0).

Questo modo di ragionare è suscettibile di una estensione importante perchè dal fatto che i vari sistemi (A_α) ammettono gli stessi integrali indipendenti da t segue che hanno comune ogni altra proprietà egualmente indipendente da t; in particolare, ogni integrale (semplice e multiplo) che sia invariante per uno di essi lo è per tutti gli altri. Qui ancora, siccome al n. 12 fu notato che ogni invariante integrale per (A_0) lo è a fortiori per l'originario sistema canonico, si conclude che *ogni invariante integrale, in particolare adiabatico, di uno qualsiasi dei sistemi ai differenziali totali* (A_α) *è tale anche per l'assegnato sistema canonico.*

15. *Esistenza per ogni sistema imprimitivo d'ordine* m *di* $m+1$ *invarianti adiabatici.* – Si è definito al n. 12 [formula (32)] un invariante adiabatico W_0 del sistema (A_0).

Per ogni altro (A_α) si può (soddisfatte che sieno debite circostanze qualitative) costruire in modo analogo un invariante adiabatico W_α. Per il modo particolare con cui interviene in tale costruzione la funzione (F_α), si hanno ciascuna volta risultati differenti, almeno in generale; donde il teorema:

Un sistema canonico, imprimitivo d'ordine m, ammette in generale $m+1$ invarianti adiabatici, che si presentano, nel modo specificato al n. 12 per W_0, ciascuno, come volume a $2(n-m)$ dimensioni di un certo campo, caratterizzato (nello spazio Ψ delle $p_{m+1}, \ldots, p_n$; $q_{m+1} \ldots, q_n$, trattandovi le $q_1, q_2, \ldots, q_m$ quali parametri) dagli $m+1$ integrali conosciuti

$$F_r = c_r \qquad (r = 0, 1, \ldots, m).$$

16. *Casi particolari. Il teorema del Burgers come immediato corollario del risultato precedente.* – Nel caso classico di Liouville in cui l'ordine di imprimitività è $m = n-1$, si conoscono complessivamente n integrali indipedenti da t e in involuzione; e l'integrazione del sistema canonico si riconduce alle quadrature (31). *Un tale sistema ammette in generale* (si vuol dire sotto le condizioni di regolarità, indipendenza, ecc., a lor luogo specificate, e da accertarsi caso per caso) n *invarianti adiabatici.*

Ciò vale naturalmente anche per il tipo particolare dello Stäckel in cui l'integrazione può eseguirsi col metodo della separazione delle variabili. Infatti questo tipo rientra

(31) Loc. cit. (17) vol. (II), cap. X, nn. 44, 45.

negli imprimitivi d'ordine $n-1$, possedendo, oltre all'integrale delle forze vive, altri $n-1$ integrali quadratici nelle p, tutti in involuzione tra loro ([32]).

Sviluppiamo almeno per questo caso il calcolo effettivo degli n invarianti adiabatici, secondo la teoria generale di cui sopra.

Per convenienza di notazione che apparirà tra un momento, attribuiremo alle $2n$ variabili coniugate p_i, q_i gli indici $0, 1, \ldots, n-1$, anzichè $1, 2, \ldots, n$: in altri termini designeremo con p_0, q_0 le due coniugate denotate finora con p_n, q_n. Con tale intesa si possono assumere come caratteristiche del tipo Stäckel le seguenti espressioni delle F_r:

$$F_r = \sum_0^{n-1}{}_h \phi_{rh} \left(\frac{1}{2} p_h^2 - U_h \right) \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1),$$

dove ogni U_h è funzione soltanto della variabile q_h, e le ϕ^{rh} (munite di due indici entrambi variabili fra gli stessi limiti, grazie alla convenzione testè adottata) sono elementi reciproci ([33]) provenienti da n funzioni

$$\phi_{rh}(q_h) \qquad (r, h = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ciascuna dell quali dipende dal solo argomento indicato.

Procediamo alla costruzione di W_0 secondo la regola dei n. 11 e 12. Dovremo immaginare risolte le equazioni

$$F_r = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{18}$$

rispetto a $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, e portare i valori che in tal guisa si ricavano in F_0, la quale, così ridotta, si designa con $\mathcal{F}_0$ e viene a corrispondere alla H del n. 11.

L'equazione $\mathcal{F}_0 = c_0$ che qui fa riscontro alla $(25')$ si presenta in conformità come risultato della eliminazione di $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ fra tutte le n equazioni

$$F_r = c_r \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \tag*{$(20)_s$}$$

dove le F_r hanno la forma esplicita (40) dello Stäckel.

Perciò l'equazione suddetta (che ha per noi il maggior interesse, dovendo appunto da essa desumere l'invariante adiabatico W_0) equivale necessariamente al risultato dell'eliminazione di $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ fra le n equazioni $(20)_s$; o ancora alla espressione di p_0 (in termini delle q e delle c) che si trae dalla risoluzione delle $(20)_s$ stesse. Usufruendo degli elementi ϕ_{r0} reciproci dei coefficienti di $\frac{1}{2}p_0^2$ nelle varie equazioni $(20)_s$ si ha immediatamente la risolvente

$$\frac{1}{2} p_0^2 = U_0 + \sum_0^{n-1}{}_s c_r \phi_{r0} \tag{41}$$

([32]) Ibidem, n. 64.
([33]) Cioè complementi algebrici divisi per il valore del determinante.

che equivale ad $\mathcal{F}_0 = c_0$ e si ridurrebbe materialmente a tale forma dividendo per ϕ_{00} e isolando c_0.

Mentre in generale la $\mathcal{H}$ del n. 11 poteva dipendere anche dalle $q_1, q_2, \ldots, q_m$, qui si dà la circostanza particolare che in $\mathcal{F}_0$ apparisce soltanto q_0. Lo spazio Ψ è ora il piano p_0, q_0, e l'invariante W_0 si riduce per conseguenza all'area di questo piano racchiusa da una curva (41).

Ecco ritrovato l'integrale ciclico

$$J_0 = \oint p_0 \, dq_0 \tag{42}$$

del Sommerfeld come invariante adiabatico. Basta evidentemente una sostituzione circolare sugli indici per trovare gli $n-1$ altri J_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Come condizioni qualitative tutto si riduce manifestamente:

1°) Alla regolarità delle funzioni (40) e risolubilità delle $(20)_s$ nel campo dei valori che si considerano; il che, partendo dalle $\phi_{rh}(q_h)$, supposte regolari, è assicurato dal non annullarsi del loro determinante $||\phi_{rh}||$.

2°) All'essere chiuse le n curve analoghe alla (41) nel rispettivo piano p_i, q_i.

Come si vede, le difficoltà e le discussioni complementari che, secondo le ordinarie dimostrazioni, sembravano necessarie in certi casi di commensurabilità, non si presentano affatto in base alla nostra teoria generale.

17. *Indicazione di ulteriori ricerche.* – Non ci è ora possibile intrattenerci su altri esempi relativi a problemi dinamici di minore imprimitività $(m < n-1)$, i quali in certo senso appariscono anche più interessanti, in quanto non integrabili per quadrature; e dobbiamo egualmente limitarci alla semplice affermazione che taluni dei risultati precedenti sono estensibili a sistemi differenziali di forma qualsiasi.

Tullio Levi-Civita (1873-1941) fisico matematico, autore con Gregorio Ricci Curbastro del "Calcolo differenziale assoluto", strumento matematico essenziale allo sviluppo della Relatività Generale. Levi-Civita si occupò, risolvendoli, di molti problemi importanti di meccanica analitica tra cui quello dell'invarianza adiabatica. Esiste un'edizione delle sue opere complete a cura dell'Unione Matematica Italiana.
