La meccanica classica e la rivoluzione quantistica nei lavori giovanili di Fermi

Giovanni Gallavotti

Si analizza la relazione fra i lavori sulla Meccanica Classica e sui fondamenti della Meccanica Statistica scritti da Fermi fra il 1921 e il 1926 e il concomitante dibattito che portò alla transizione verso la Meccanica Quantistica. L'atteggiamento di Fermi ha profondamente influito sulla fisica italiana di tutto il '900.

1. – Introduzione

I primi lavori di Fermi, svolti fra il 1921 e il 1926 (con la fondamentale teoria del "gas di Fermi" ossia la "statistica di Fermi") offrono occasioni di riflessione anche perché furono eseguiti in un periodo in cui la fisica subì rivolgimenti profondi dei quali il giovanissimo Fermi era ben cosciente pur nella solitudine dovuta alla scarsa, se non nulla, partecipazione della scienza italiana ufficiale.

L'interesse per la Relatività Generale e la padronanza di questa teoria, allora di recentissima acquisizione, si manifestano in vari lavori sulle correzioni alle masse e alle equazioni del moto di corpi carichi in movimento in campi elettromagnetici o gravitazionali. Al tempo stesso emerge il suo interesse per gli esperimenti di fisica atomica e la relativa progettazione e interpretazione teorica vista come verifica di conseguenze di leggi fondamentali. Così pure è viva l'attenzione a problemi di Meccanica e Probabilità: e già nella sua tesi risolve il problema del "tempo di arresto" in un cammino aleatorio (con nomenclatura odierna) applicandolo alla teoria dell'influenza di Giove sulle orbite delle comete [1].

Qui però mi occuperò piuttosto di un altro gruppo di lavori, sulla Meccanica, legati a questioni generate dalla nascente Meccanica Quantistica.

2. – Invarianti adiabatici e ipotesi quasi ergodica

Mi pare invero assai singolare che Fermi, che più volte ebbe occasione di manifestare apprezzamento entusiasta per la meccanica di Bohr, abbia in un certo senso mancato di partecipare ai momenti decisivi in cui avvenne la transizione dalla teoria empirica, spesso contraddittoria, basata sulle regole di Bohr-Sommerferld, alla nuova meccanica di Heisenberg, Born, Jordan.

Fermi non conosceva (non lo citò mai) il lavoro di Einstein [2, 3] che, a sua scusa, fu sostanzialmente ignorato da tutti i contemporanei [3] forse perché oscurato dal celeberrimo lavoro [4] sulla nuova derivazione della legge di Planck o perché all'epoca i lavori di Ehrenfest e Burgers [5, 6] (anch'essi del 1917 e divenuti riferimento chiave) apparivano sufficientemente generali.

In questo lavoro del 1917 (contemporaneo dunque all'altro sulla legge di Planck) Einstein oltre a proporre una prescrizione di quantizzazione "intrinseca", ossia indipendente dal sistema di coordinate usato per descrivere i moti, che costituisce un'assai notevole estensione delle regole di quantizzazione [7] e che è poi quella cui ci si riferisce oggi sebbene con altre attribuzioni, sollevò dubbi (in forma di commenti dubitativi finali e con chiarezza piú che con forza) su un punto cardine della Meccanica di Bohr-Sommerferld basata sulla quantizzazione delle azioni e quindi, prima ancora, sulla loro esistenza. Sostenne giustamente che in generale le azioni che si voleva quantizzare in realtà potevano non esistere in quanto oggetti ben definiti in Meccanica Classica.

Fermi, indipendentemente, si preoccupò subito di questo stesso problema facendo vedere che *anche* sistemi nei quali era possibile definire le azioni da quantizzare non erano quantizzabili in modo non ambiguo o non arbitrario, giungendo a fornire semplici esempi *concreti* in cui il principio delle adiabatiche che ormai si invocava a fondamento delle regole di quantizzazione [7] risultava non applicabile [8].

Dunque si dedicò a trovare o a porre in evidenza le grandi difficoltà incontrate nei tentativi di porre su basi solide la teoria di Bohr-Sommerferld invece di partecipare al grande dibattito che pochi mesi dopo il suo lungo soggiorno a Göttingen, ossia nel turbinio delle nuove idee, generò i celebri lavori sulla Meccanica delle Matrici.

La sua formazione autodidatta probabilmente lo portava, allora, a richiedere stretta coerenza logica e formale ai suoi ragionamenti e inferenze e, quindi, ad un senso critico forse troppo forte (pregio e difetto comune anche ai "normalisti" meno noti) e trovò, come lui stesso ebbe a dire nel settembre 1925, eccessivo il rinunciare a capire cosa veramente accada: "*per il mio gusto mi sembra che comincino proprio ad esagerare nella tendenza di rinunciare a capire le cose*", pag. 24 in [9]. E forse questo lo portò a non apprezzare (e forse a considerare ascientifica) l'atmosfera che doveva permeare le discussioni che avvenivano a Göttingen, dove poco prima nel 1923 aveva soggiornato a lungo (circa sei mesi). Il lavoro di Heisenberg [10] apparve nel luglio 1925 mentre quello "dei tre uomini" (Born, Heisenberg e Jordan) [11] nel novembre 1925, successivo ai lavori di Born-Jordan [12] e di Dirac [13] apparsi nel frattempo!

Comunque nel soggiorno di Göttingen Fermi fu subito portato a studiare la questione dell'esistenza degli invarianti adiabatici: una nozione che si tentava di utilizzare (con difficoltà *cfr.* [2,14]) a fondamento teorico delle regole di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld. E nel febbraio 1923 pubblicò un importante lavoro [15] la cui versione tedesca è seguita da una versione italiana pressoché identica ma divisa in due articoli [16, 17]: il primo esclusivamente dedicato ad un teorema di Meccanica Analitica (*cfr.* seguito) e il secondo all'applicazione dal titolo: *"Dimostrazione che in generale un sistema meccanico è quasi ergodico"*.

Di fatto il lavoro presenta una critica fondamentale e in un certo senso definitiva all'idea degli invarianti adiabatici (sviluppando in grande dettaglio tecnico i dubbi sollevati nei commenti finali del lavoro indipendente di Einstein prima citato [2,3]): ma in esso, a Göttingen nel febbraio 1923 [15], non si menzionano gli invarianti adiabatici, come pure non sono menzionati nella versione italiana, sempre a Göttingen nell'aprile 1923 [16], che tratta il teorema meccanico riproducendo quasi *verbatim* l'analoga versione tedesca (mentre la seconda parte del lavoro [15] appare separatamente in italiano in un breve articolo [17]). Gli invarianti sono però esplicitamente menzionati e criticati in dettaglio fin dalle prime righe dei lavori [18, 19], sempre scritti a Göttingen ma solo in italiano e nello stesso periodo.

La pubblicazione bilingue di [15] e la divisione in parte "matematica" [16] e in breve "parte fisica" [17] della versione italiana indicano l'importanza che Fermi dovette attribuire a questa sua ricerca. Però invece che sottolinearne la rilevanza come critica fondamentale e distruttiva dei tentativi di razionalizzazione delle regole di Bohr-Sommerfeld basati sul principio delle adiabatiche, Fermi presenta i suoi risultati come dedicati ai fondamenti della Meccanica Statistica e come soluzione del problema fondamentale dell'esistenza di sistemi quasi ergodici, anch'essi introdotti dagli Ehrenfest per salvare quella che (erroneamente, *cfr.* §1.9 in [20]) reputavano essere l'ipotesi ergodica di Boltzmann e che era affetta da (ovvie) contraddizioni che molti avevano messo in luce.

3. – Le due parti della dimostrazione di Fermi dell'ipotesi quasi ergodica

Fermi dunque presenta una "dimostrazione" che un sistema hamiltoniano a f gradi di libertà è in generale quasi ergodico: nel senso che dati *due qualsiasi* elementi di superficie σ e σ'' sulla superficie $(2f-1)$-dimensionale di energia costante ("*endlich*" nel senso di "aperti", come si evince dall'analisi e come Fermi dovette dire esplicitamente rispondendo ad una critica [21]) esistono traiettorie che iniziano in σ e passano (a tempo debito) per σ''.

Questo sarebbe un risultato di estremo interesse, anche *a prescindere* dal fatto che implica la *non esistenza*, in generale, degli integrali d'azione di Bohr-Sommerfeld e quindi l'impossibilità di applicare il principio delle adiabatiche a sistemi generali. Credo che sia lecito pensare che *quest'ultima* fosse la vera motivazione della ricerca ma che era probabilmente opportuno, specie per un giovane borsista a Göttingen, lasciarla dedurre al lettore celandola dietro un "innocente" e comunque importantissimo risultato sui fondamenti di una teoria considerata ormai acquisita e confermante la medesima: e invero Ehrenfest fu assai impressionato da questi risultati il che generò importanti contatti e collaborazioni scientifiche fra Fermi e i colleghi della scuola di Ehrenfest tra cui Uhlenbeck. Del resto, come detto sopra, nello stesso periodo Fermi pubblicò vari articoli in cui si parlava esplicitamente di invarianti adiabatici e delle difficoltà relative [18, 19].

La *prima parte* del lavoro estende un teorema di Poincaré [22] (che era anche opportunamente citato, come critica al principio delle adiabatiche, da Einstein [2]): è un'analisi squisitamente matematica ispirata dal lavoro originale. Si considera un sistema hamiltoniano a f gradi di libertà, con coordinate canoniche $(p, q) \in R^{2f}$, con hamiltoniana $H(p, q, \mu)$ dipendente da un parametro μ e che per $\mu = 0$ si riduce ad un sistema integrabile per quadrature (ossia per separazione delle variabili): ci si domanda se possa esistere una funzione analitica $\Phi(p, q, \mu)$ definita sulla superficie di energia costante $H(p, q, \mu) = E$ che resta identicamente nulla sulle traiettorie che iniziano sulla superficie $H = E$ se all'istante iniziale $\Phi = 0$.

Poincaré aveva considerato, invece, funzioni $G(p, q, \mu)$ analitiche sulla superficie $H = E$ e in μ, che mantengono il valore iniziale (che esso sia nullo o meno) su qualsiasi traiettoria del sistema, ossia funzioni che sono "integrali primi" al variare del parametro μ. Il suo risultato fu che "in generale" tali integrali primi non possono esistere.

Il teorema di Fermi può essere riformulato dicendo che se δ è la funzione delta di Dirac allora non possono esistere funzioni della forma $G(p, q, \mu) = \delta(\Phi(p, q, \mu))$ che siano integrali primi al variare di μ, sotto ipotesi molto generali su H che non è il caso di elencare qui. Poiché la funzione delta non è regolare il teorema di Fermi è un importante *complemento* di quello di Poincaré: e, visto il metodo di dimostrazione, può esserne considerato una generalizzazione (come lo classifica Fermi stesso).

Oltre alle ipotesi esplicitamente dichiarate è implicito nella dimostrazione che Φ sia tale che l'insieme dei punti (p, q) della superficie $(2f - 1)$-dimensionale di energia $H = E$ per i quali $\Phi(p, q, \mu) = 0$ sia una superficie regolare S_μ a $2f - 2$ dimensioni analitica in (p, q) e μ che, quindi, per ogni μ separi la superficie di energia costante in due regioni sconnesse.

Si può vedere che un invariante adiabatico sarebbe proprio una funzione che gode delle proprietà della (inesistente) Φ.

La *seconda parte* del lavoro [15], di maggiore interesse fisico, stabilisce quanto detto sopra: se σ, σ'' sono due elementi della superficie di energia costante devono esistere traiettorie che visitano sia σ che σ''. È ben noto che l'argomento dato da Fermi per pervenire a questa conclusione è basato sull'ipotesi che se σ' è la regione spazzata dalle traiettorie con dato iniziale in σ la sua frontiera S_μ è una superficie separante σ' dal suo complemento, *intendendo per "superficie" una superficie di dimensione* $2f - 2$ *e che sia anche analitica in* (p, q, μ).

Quest'ipotesi di regolarità di S_μ della cui necessità Fermi si rende conto, forse tardivamente, nella nota aggiunta in bozze alla fine del lavoro è estremamente restrittiva e, alla luce delle conoscenze acquisite successivamente [23], talmente forte da rendere il risultato poco interessante, perchè proprio questa regolarità *andrebbe dimostrata e non supposta.*

Oggi sappiamo che (se $f > 2$) la situazione normale è che esistano molte superfici invarianti ma di dimensione più bassa (precisamente f) nessuna delle quali però divide la superficie di energia costante in parti sconnesse.

È inoltre noto dalla teoria moderna delle perturbazioni dei sistemi hamiltoniani [24, 23, 25] che nelle ipotesi di Fermi è senz'altro falso che la maggior parte delle traiettorie (ossia tutte tranne un insieme che occupa un volume totale nullo, o meglio un'area totale nulla, sulla superficie di energia costante) siano dense sulla superficie di energia costante o che sia valida l'ipotesi ergodica nel senso di Boltzmann [20]. In un certo senso anzi ci si trova in una situazione opposta a quella ipotizzata da Boltzmann e che oggi consideriamo di "banale non ergodicità".

Le superfici invarianti di dimensione f occupano sempre, nelle ipotesi di Fermi, un volume assai grande dello spazio delle fasi ma con frontiera probabilmente "frattale" e quindi priva delle abituali proprietà di regolarità che ci si aspetta nel parlare di "superficie". *Nonostante tutto questo è ancora possibile che esistano traiettorie dense* (sebbene occupanti una piccola area della superficie di energia costante) o, date due arbitrarie regioni aperte della superficie di energia costante, che esistano traiettorie che le connettano (che è il senso che Fermi nel suo lavoro diede alla proprietà di "quasi ergodicità" e che credette di dimostrare valida): la questione anzi è tuttora di grande attualità e si inserisce nel quadro dei problemi noti come fenomeni di "diffusione nello spazio delle fasi" o di "diffusione di Arnold".

La difficoltà descritta limita l'interesse della seconda parte, e quindi la conclusione, del lavoro di Fermi (una pagina in tutto nel lavoro [15] che, come già detto, fu riprodotta a parte in versione italiana [17]). Questo fu quasi subito fatto notare a Fermi che rispose in modo piuttosto evasivo e, ai nostri occhi, certo poco convincente, *cfr.* commento all'obiezione 1 in [21].

4. – L'esperimento che mostrò la non correttezza dell'ipotesi quasi ergodica

Il problema dovette rimanere sempre presente alla mente di Fermi che a breve distanza dal suo tramonto ritornò sulla questione riscattando il suo "errore" del 1923 con un lavoro di fondamentale importanza: ossia, con J. Pasta e S. Ulam, affrontò la questione attraverso un'esperienza che è la versione sperimentale della contemporanea teoria di Kolmogorov che chiarì come fosse sostanzialmente insostenibile che la seconda parte del lavoro [15] realmente dimostrasse la validità dell'ipotesi quasi ergodica.

L'esperimento, del 1954, in [26] si propose di risolvere numericamente le equazioni del moto di una catena di oscillatori anarmonici, certamente soddisfacente le ipotesi del teorema meccanico di Fermi [16], per verificare se esistessero effettivamente traiettorie quasi ergodiche secondo l'ipotesi quasi ergodica e dare almeno una giustificazione sperimentale al teorema quasi ergodico affermato, ma non provato, da Fermi nel lavoro del 1923 e al suo ruolo di fondamento della Meccanica Statistica.

Il risultato, *cfr.* [27] per un'analisi dettagliata del lavoro e della sua influenza, fu che il sistema in questione non si comportava come ci si sarebbe dovuto attendere se l'ipotesi ergodica fosse stata corretta (sia se intesa nel senso di Ehrenfest sia se intesa nel senso più interessante e fisicamente rilevante di Boltzmann, *cfr.* [20]).

Il risultato è in perfetto accordo con la teoria di Kolmogorov apparsa quasi contemporaneamente ed è notevole perchè pose i fisici di fronte al fatto che la fisica classica dava risultati scorretti alle basse temperature o nella teoria del corpo nero, non solo perchè in tali regioni la Meccanica Classica non era più valida e andava sostituita dalla Meccanica Quantistica ma anche perchè i principi della Meccanica Statistica (quale l'equipartizione) manifestamente cessavano di valere in questi sistemi, anche se visti classicamente, *cfr.* [28-30,20]. Inoltre il risultato di [26] fu notevole perchè costituì la prima realizzazione di un esperimento numerico sulla Meccanica Statistica e aprì la strada a numerosissime ricerche sulla Meccanica Statistica dell'equilibrio e del non equilibrio e sulla Meccanica dei Fluidi basate su simulazioni numeriche, *cfr.* ad esempio [31, 32].

5. – La fisica teorica in Italia e l'atteggiamento iniziale di Fermi verso la Meccanica delle Matrici.

Tornando ai lavori giovanili di Fermi si può dire che il lavoro sulla genericità della validità dell'ipotesi quasi ergodica fu presentato come un lavoro sui fondamenti della Meccanica Statistica e come tale non può essere considerato un successo: se però si tiene conto che molto probabilmente, come ho qui cercato di dimostrare, era nato ed era inteso come una severa critica alla fondazione della teoria di Bohr-Sommerfeld sugli invarianti adiabatici allora raggiunse pienamente il suo scopo.

Dopo poco tempo Fermi pervenne alla scoperta della statistica di Fermi e adottò a pieno la meccanica ondulatoria di Schrödinger abbandonando quindi le ricerche sugli invarianti adiabatici (ma dopo un ultimo lavoro in cui si cercava di darne un'interpretazione nel quadro nella Meccanica ondulatoria [33]).

Fermi quindi ritornò alla ricerca di punta sulla Meccanica Quantistica dopo aver rischiato di essere sorpassato dagli eventi avendo mancato l'occasione, avuta grazie anche alla lungimiranza di Corbino e alla conseguente borsa per Göttingen, di essere protagonista nella nascita della Meccanica delle Matrici (equivalente alla Meccanica ondulatoria).

Di tutto questo resta una traccia profonda nella fisica italiana che, certo sotto l'influenza di Fermi, nella didattica si accosta ancora alla Meccanica Quantistica nella sua forma ondulatoria: fino ad oggi virtualmente tutte le generazioni di fisici italiani continuano a mettere da parte, nel periodo della formazione, lo studio della meccanica delle matrici perdendo quanto di concettualmete importante essa ha da offrire, *cfr.* [34].

Mentre non possiamo che essere grati a Fermi per avere, con il suo esempio e prestigio, tenuto molti di noi lontani, almeno negli anni della formazione, dalle interminabili discussioni e analisi sui fondamenti della nuova meccanica dobbiamo vedere con un certo rimpianto che la meccanica delle matrici di Heisenberg e collaboratori non sia in realtà mai stata insegnata in Italia in corsi fondamentali nelle principali Università: questo mostra come anche fisici come Fermi, e per giunta giovani, possano non apprezzare immediatamente la portata dei cambiamenti che pur si svolgono sotto i loro occhi. È un fenomeno che si ripete continuamente sebbene non sia necessariamente negativo perchè è assai utile nel limitare l'influenza di "mode" che sono in auge lo spazio di qualche anno e finiscono dimenticate o quasi.

È opportuno, per chiarezza, osservare che anche negli altri paesi, in particolare in quello di origine, la meccanica delle matrici è sempre stata e continua ad essere sostanzialmente ignorata nei corsi formativi a favore del punto di vista ondulatorio. Sarà un interessante problema storico capire come mai.

* * *

Sono grato a CARLO BERNARDINI per avermi proposto di scrivere un articolo sui lavori giovanili di E. Fermi per il volume per il centenario fermiano, a SANDRO GRAFFI per avermi fatto conoscere il lavoro di Einstein [2] e al Professor GIORGIO SALVINI per i commenti sul manoscritto e i chiarimenti che ha voluto darmi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] FERMI E., *Un teorema di calcolo delle probabilità ed alcune sue applicazioni*, Tesi di abilitazione della Scuola Normale Superiore, Pisa (1922) inedito. Stampato su [35], lavoro n. 38b.

[2] EINSTEIN A., *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein*, in *Verhandlungen der Deutsche physikalische Gesellschaft*, **19** (1917) 82. Ristampato in italiano in [3]: *Sulla quantizzazione di Sommerfeld e Einstein*, traduzione di S. Graffi.

[3] GRAFFI S., *Le radici della quantizzazione*, Quaderni di Fisica Teorica, Università di Pavia, 1993, ISBN 88-85159-09-05.

[4] EINSTEIN A., *On the quantum theory of radiation*, versione inglese riprodotta in [34].

[5] EHRENFEST P., *Adiabatic invariants and the theory of quanta, Philos. Mag.*, **33** (1917) 500. Ristampato in [34].

[6] BURGERS J. M., *Adiabatic invariants of mechanical systems, Philos. Mag.*, **33** (1917) 514.

[7] Riassumo *per sommi capi* il principio delle adiabatiche e le definizioni associate ad esso. Sia data una hamiltoniana a f gradi di libertà avente la forma $H_t(p,q) = H_0(p,q) + \frac{t}{T}K(p,q)$, ove H_0, K sono funzioni delle coordinate canoniche $(p,q) \in R^{2f}$ e T è la scala di tempo sulla quale si avverte la variazione della hamiltoniana con il tempo t; si dice che le hamiltoniane H_0 e H_T sono *adiabaticamente connesse nel limite* $T \to \infty$ ovvero che H_0 si trasforma in modo *infinitamente lento* (per $T \to \infty$) in $H_0 + K$. Denotiamo con (p_t, q_t) la soluzione delle equazioni del moto $\dot p = -\partial_q H_t(p,q), \dot q = \partial_p H_t(p,q)$ con dato iniziale (p_0, q_0). Sia dato anche, per ogni $t \in [0,T]$ *fissato*, un integrale primo $J(p,q;H_t)$ per la hamiltoniana H_t (continuo come funzione di p,q,t). *Si dice che $J(p,q;H_t)$ è un invariante adiabatico se per ogni dato iniziale (p_0,q_0) si ha*

$$J(p_0,q_0;H_0) = \lim_{T\to\infty} J(p_T,q_T;H_T)\,,$$

o, talvolta, se $\lim_{T\to\infty} T \max_{0\le t\le T} |\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} J(p_t,q_t;H_t)| = 0$ (definizione di Ehrenfest [5]). Se la hamiltoniana H_t è integrabile per quadrature per ogni t fissato e la trasfomazione canonica che la integra è regolare in p,q,t allora le azioni $J_i(p,q;H_t) = \oint_{\gamma_i(t)} p \cdot \mathrm{d}q$ dell'i-esimo ciclo $\gamma_i(t)$ del toro invariante f-dimensionale su cui si svolgono i moti del sistema con hamiltoniana H_t a t fisso sono invarianti adiabatici (teorema di Burgers [6]). In realtà Burgers dimostrò questo teorema in un caso particolare, supponendo che l'integrabilità per quadrature sia possibile per "separazione delle variabili" e Ehrenfest, e poi Bohr, Kramers e "tutti gli altri" lo utilizzarono per proporre o applicare il principio delle adiabatiche, *cfr.* seguito, fino all'abbandono dell'idea nel 1925: fu Einstein [2, 3] a dare la definizione per i sistemi più generali integrabili per quadrature. Per comodità di riferimento ricordo che un sistema si dice integrabile per separazione delle variabili se è possibile cambiare coordinate q in q' in modo che nelle nuove variabili il momento coniugato a q'_k si esprima in funzione della sola q'_k e di f integrali primi. Invece un sistema integrabile per quadrature è un sistema per il quale si può definire una *trasformazione canonica* $(p, q) \to (p', q')$ (nella quale in generale q' *non dipende solo da* q *ma anche da* p) che rende il sistema integrabile per separazione delle variabili: è questa una definizione geometrica intrinseca sulla quale Einstein propose (inascoltato [3]) di basare il principio delle adiabatiche. Il *principio delle adiabatiche* (di Ehrenfest [5]) dice che, se H_0 e H_T sono due hamiltoniane adiabaticamente connesse da una famiglia H_t di hamiltoniane integrabili per quadrature, allora se la quantizzazione di H_0 seleziona i moti per cui $J_i(p_0, q_0; H_0)$ hanno certi valori (ad esempio $J_i(p_0, q_0; H_0) = n_i h$, con n_i interi) anche la quantizzazione di H_T richiede le stesse regole per le $J_i(p_0, q_0; H_T)$ (ossia nell'esempio anche $J_i(p_0, q_0; H_T) = n_i h$) e questo consente di formulare una regola generale di quantizzazione per i sistemi adiabaticamente connessi all'oscillatore armonico. Ad esempio, $H_t(p, q) = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2 + \frac{t}{T}(-k/|q| - m\omega^2 q^2/2)$ *considerata in coordinate polari* consente di trovare la regola di quantizzazione dell'atomo di idrogeno ($t = T$) a partire da quella per l'oscillatore armonico ($t = 0$). Fermi fa vedere in un esempio concreto [18] e genericamente [19] che le $J_i(p_T, q_T; H_T)$ *non sono in generale uguali a* $J_i(p_0, q_0; H_0)$ *se* H_0, H_T *sono integrabili per quadrature ma* H_t *non lo è per per* $0 < t < T$. La difficoltà principale nell'applicazione del principio delle adiabatiche alla teoria della quantizzazione fu che i sistemi hamiltoniani rilevanti per la Fisica Atomica non sono integrabili per quadrature, ad eccezione dell'oscillatore armonico, dell'atomo di idrogeno, del gas libero, dei reticoli di oscillatori armonici e pochissimi altri casi. Ad esempio, l'atomo di elio classico non è integrabile per quadrature. Il problema centrale della meccanica celeste "*post Laplace*" [36] si ripresentò, dunque, nella meccanica atomica e in forma assai più gravida di conseguenze facilmente osservabili.

[8] Fermi E., *Il principio delle adiabatiche ed i sistemi che non ammettono coordinate angolari*, *Nuovo Cimento*, **25** (1923) 171. Ristampato in [35], lavoro n. 12.

[9] De Maria M., *Fermi, un fisico da via Panisperna all'America*, *Le Scienze*, collana *I grandi della scienza*, **8** (1999) 1.

[10] Heisenberg W., *Quantum theoretical reinterpretation of kinematic and mechanical relations, Z. Phys.*, **33** (1925) 879: in inglese in [34].

[11] Born M., Heisenberg W. e Jordan P., *On quantum mechanics, II, Z. Phys.*, **35** (1926) 557: in inglese in [34].

[12] Born M. e Jordan P., *On quantum mechanics, Z. Phys.*, **34** (1925) 858: in inglese in [34].

[13] Dirac P. A. M., *The fundamental equations of quantum mechanics*, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **109** (1926) 642. Ristampa in [34].

[14] Fermi E., *Sui principi della teoria dei quanti, Rendiconti del Seminario Matematico Università di Roma*, **8** (1925) 7. Ristampato in [35], lavoro n. 22.

[15] Fermi E., *Beweis dass ein mechanisches normalsysteme im algemeinen quasi ergodisch ist, Phys. Z.*, **24** (1923) 261. Ristampato in [35], lavoro n. 11a.

[16] Fermi E., *Generalizzazione del teorema di Poincaré sopra la non esistenza di integrali di un sistema di equazioni canoniche normali*, *Nuovo Cimento*, **26** (1923) 101. Ristampato in [35], lavoro n. 15.

[17] Fermi E., *Dimostrazione che in generale un sistema meccanico è quasi ergodico*, *Nuovo Cimento*, **25** (1923) 267–269.

[18] Fermi E., *Il principio delle adiabatiche ed i sistemi che non ammettono coordinate angolari*, *Nuovo Cimento*, **25** (1923) 171. Ristampato in [35], lavoro n. 12.

[19] Fermi E., *Alcuni teoremi di meccanica analitica importanti per la teoria dei quanti*, *Nuovo Cimento*, **25** (1923) 271. Ristampato in [35], lavoro n. 13.

[20] Gallavotti G., *Statistical Mechanics* (Springer Verlag, Berlin) 1999.

[21] FERMI E., *Über die existenz quasi-ergodisher systeme, Phys. Z.*, **25** (1924) 166. Ristampato in [35], alla fine del lavoro n. 11a.

[22] POINCARÉ, H., *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vol. III (Gauthier-Villard, Paris) 1899.

[23] KOLMOGOROV N., *Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamilton function*, in *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Systems*, a cura di G. CASATI e J. FORD, *Lect. Notes Phys.*, Vol. **93** (Springer-Verlag) 1979.

[24] GALLAVOTTI G., *Teoria delle perturbazioni*, voce per l' *Enciclopedia della Fisica* (edizioni dell'Enciclopedia italiana, Roma) 1994.

[25] GALLAVOTTI G., *Meccanica Elementare* (Boringhieri, Torino) 1986.

[26] FERMI E., PASTA J. e ULAM S., *Studies of nonlinear problems*, Los Alamos report LA-1940 (1955) Vol. II, pagg. 978-988, ristampato in [35].

[27] FALCIONI M. e VULPIANI A., *Il contributo di Enrico Fermi ai sistemi non lineari: l'influenza di un articolo mai pubblicato*, pubblicato in questo volume.

[28] GALGANI L. e SCOTTI A., *Planck-like distributions in classical nonlinear mechanics, Phys. Rev. Lett.*, **28** (1972) 1173.

[29] BENETTIN G., GALGANI L. e GIORGILLI A., *Boltzmann's ultraviolet cut-off and Nekhoroshev's theorem on Arnold diffusion, Nature*, **311** (1984) 444.

[30] BENETTIN G., GALGANI L. e GIORGILLI A., *The Dynamical Foundations of Classical Statistical Mechanics and the Boltzmann-Jeans Conjecture*, a cura di S. KUKSIN V. F. LAZUTKIN e J. PÖSCHEL (Birkhauser) 1993.

[31] EVANS D. J. e MORRISS G. P., *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Fluids* (Academic Press, New York) 1990.

[32] BOHR T., JENSEN M. H., PALADIN G. e VULPIANI A., *Dynamical Systems Appproach to Turbulence* (Cambridge University Press) 1998.

[33] FERMI E. e PERSICO E., *Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva nella nuova meccanica ondulatoria, Rendiconti Lincei*, **4** (1926) 452. Ristampato in [35], lavoro n. 37.

[34] VAN DER WAERDEN B. L., *Sources of quantum mechanics* (Dover) 1968 (questa è una raccolta dei principali lavori sulla meccanica delle matrici con un'importante introduzione critica).

[35] FERMI E., *Note e Memorie (Collected papers)* (Accademia dei Lincei e University of Chicago Press) vol. I, 1961 e vol. II, 1965.

[36] GALLAVOTTI G., *Quasi periodic motions from Hypparchus to Kolmogorov*, prestampa in `http://ipparco.roma1.infn.it` e in mp_arc #99-244, chao-dyn #9907004, Roma 1999.

Giovanni Gallavotti è nato il 29 dicembre 1941, si è laureato in Fisica all'Università di Roma nel 1963; è Professore Ordinario di Meccanica dal 1971 e "Lefschetz professor" al Dipartimento di Matematica della Università di Princeton dal II semestre AA 1982. Membro dell'Institute for Advanced Study di Princeton nel secondo semestre AA 1984/85 e membro corrispondente dell' Accademia dei Lincei dal luglio 1994. Vincitore del "Premio Nazionale Presidente della Repubblica" il 18 giugno 1997. Ha partecipato alla Conferenza plenaria al Convegno ICM98 a Berlino nell'agosto 1998. Autore di 173 pubblicazioni a stampa e 4 monografie in italiano di cui tre pubblicate in traduzione inglese e 1 pubblicata solo in inglese.
