La statistica di Fermi

Giorgio Parisi

Se si apre una rivista di fisica contemporanea si incontra spesso il nome di Fermi, ma nel sostantivo derivato, “fermione”. E altre volte si entra direttamente in contesti strettamente connessi, “statistica di Fermi” o “momento di Fermi”.

Tutti i corpi, ed in particolare le particelle elementari, a seconda delle loro proprietà quantistiche e della statistica che seguono (vedremo poi che cosa intendono i fisici con la parola *statistica*), si dividono in fermioni e in bosoni, dove la parola bosone deriva non da Bosone, duca di Borgogna, parente di Carlo Magno, ma dal fisico indiano Bose, che scrisse il primo fondamentale lavoro sulle proprietà statistiche dei quanti di luce (che sono dei bosoni). In breve, i bosoni seguono la statistica di Bose-Einstein e i fermioni quella di Fermi-Dirac([1]).

Prima di ricostruire la storia della scoperta delle statistiche quantistiche dobbiamo fare una parentesi e spiegare che cosa i fisici intendano misteriosamente con la parola *statistica*. Consideriamo un caso molto semplice: due bicchieri e due palline. Assumiamo che le palline siano oggetti macroscopici (quindi soddisfano la meccanica classica). Supponiamo di mettere le palline in maniera casuale sotto i bicchieri; ci sono quattro possibilità:

– Due palline sotto il bicchiere A e nessuna sotto il bicchiere B.

– Due sotto il bicchiere B e nessuna sotto il bicchiere A.

– Una delle due palline sotto il bicchiere A e l'altra sotto il bicchiere B.

([1]) Grosso modo, se ci limitiamo alle particelle elementari, le particelle che consideriamo come costituenti della materia (elettrone, protone, neutrone, neutrino, quark) sono dei fermioni, mentre quelle che sono associate alla quantizzazione di un campo di forze (fotone, gravitone, pione) sono dei bosoni. Le particelle composte sono dei bosoni, se (e solo se) sono formate da un numero pari di fermioni.

– La stessa situazione del caso precedente, ma con le due palline scambiate.

Le probabilità corrispondenti sono

$$P_{AA} = P_{BB} = 1/4; \quad P_{AB} = 1/2 \ , \tag{1}$$

dove abbiamo indicato con P_{AA} la probabilità di avere due palline sotto il bicchiere A, con P_{BB} la probabilità di avere due palline sotto il bicchiere B e con P_{AB} la probabilità di avere una pallina sotto il bicchiere A e una pallina sotto il bicchiere B.

Lo stesso risultato si può ottenere ragionando in maniera lievemente diversa. Metto la prima pallina a caso sotto uno dei due bicchieri (le due possibilità sono equiprobabili), successivamente aggiungo la seconda pallina a caso sotto uno dei due bicchieri (e anche adesso le due possibilità sono equiprobabili) e facendo i facili conti ritrovo il risultato precedente. Il tutto è ben noto ai giocatori di bridge, che sanno che se Est e Ovest sono in possesso di soli due *atout*, la probabilità *a priori* che i due *atout* siano bilanciati (uno Est e uno Ovest) è del cinquanta per cento.

La formula precedente si può generalizzare facilmente al caso di N palline in M bicchieri. Per esempio, se abbiamo due bicchieri e indichiamo con k_1 e k_2 il numero di palline rispettivamente nel primo e nel secondo bicchiere ($k_1 + k_2 = N$) abbiamo che $P(k_1, k_2) = \frac{N!}{k_1!k_2!}(\frac{1}{2})^N$. Nel caso di tre bicchieri

$$P(k_1, k_2, k_3) = \frac{N!}{k_1!k_2!k_3!} \left(\frac{1}{3}\right)^N \ . \tag{2}$$

Questi risultati classici della teoria della probabilità vengono indicati come la statistica di Boltzmann in quanto Boltzmann li aveva usati nelle sue deduzioni statistiche.

Qualche piccolo dubbio su questi risultati potrebbe venire nel caso in cui le palline siano veramente indistinguibili, tuttavia classicamente questo caso non accade mai: possiamo sempre seguire (almeno concettualmente) la traiettoria delle palline e identificare la prima pallina, per esempio come quella che è entrata per prima nella stanza.

Quantisticamente le cose cambiano:

– Esistono oggetti veramente indistinguibili: tutti gli elettroni sono uguali, non c'è un'elettrone con una macchia bianca, un'altro un poco schiacciato ai poli, quello con una piccola scalfittura... Gli elettroni non hanno piccoli segni di riconoscimento come gli oggetti macroscopici([2]).

– Inoltre in meccanica quantistica non possiamo concettualmente pensare di tenere sempre sotto osservazione le particelle in modo da seguirle costantemente per evitare il rischio di confonderle, a meno di non perturbare in maniera costante il sistema.

([2]) Un oggetto indivisibile, non decomponibile ulteriormente, non può avere segni di riconoscimento.

Nel caso quantistico non ci sono motivi forti per mantenere la statistica classica (ovvero quella appena esposta) e considerare il caso in cui la prima pallina sta nel bicchiere A e la seconda in B come diversa dalla situazione opposta, se le palline sono indistinguibili. Tuttavia non ci sono nemmeno dei motivi evidenti per abbandonare la statistica classica e passare alle statistiche quantistiche. Abbandonare il modo classico di contare gli stati implicava un cambiamento completo di prospettiva che non era affatto facile fare. Infatti il primo passo fu fatto inconsapevolmente da Bose e sulla sua scia si inserirono velocemente Einstein, Fermi e Dirac.

Proviamo a riformulare lo stesso problema in maniera quantistica. Ci sono due particelle (o palline) indistinguibili, che per ipotesi non interagiscono tra di loro. Ciascuna di queste particelle può stare in uno dei due stati quantici A o B con uguale probabilità *a priori* (gli stati quantici giocano lo stesso ruolo dei bicchieri([3]). Ci domandiamo quali siano le probabilità di trovare due particelle in questi due stati quantici se le particelle sono messe in maniera casuale.

Se apriamo un manuale di meccanica quantistica scopriamo che, se le particelle sono dei bosoni, nel caso precedente di due palline in due bicchieri abbiamo che

$$P_{AA} = P_{BB} = P_{AB} = 1/3 \ , \tag{3}$$

sempre se supponiamo che la pallina possa stare in un solo stato quantistico dentro ciascun bicchiere.

La formula precedente si può generalizzare facilmente al caso di N palline in k bicchieri. Per esempio, se abbiamo due bicchieri e indichiamo con k_1 e k_2 il numero di palline rispettivamente nel primo e nel secondo bicchiere abbiamo che $P(k_1, k_2) = (N+1)^{-1}$. Nel caso di tre palline

$$P(k_1, k_2, k_3) = C_3(N) \ , \tag{4}$$

dove $C_3(N)$ è un'appropriata funzione di N. In generale nel caso di Bose le probabilità non dipendono dalle k ma solo da N, come fu dimostrato da Dirac nella seconda metà del '26.

Il risultato precedente è facile da interpretare. Dal punto di vista quantistico ci sono solo tre possibilità e non quattro: due palline in A, due palline in B e una pallina in A e una pallina in B; infatti, dato che le palline sono indistinguibili, non ha senso distinguere quale pallina stia in A e quale in B. Se gli *atout* fossero indistinguibili, cosa che non sono in realtà([4]), la probabilità di una mano bilanciata sarebbe solo 1/3. Un irriducibile pensatore classico tenderebbe ad interpretare questo fenomeno come un'attrazione intrinseca

([3]) Un esempio di stato quantico è un orbitale di un elettrone intorno ad un nucleo.
([4]) Gli *atout* sono oggetti macroscopici e inoltre un 4 del seme di *atout* è diverso da un 3 dello stesso seme.

tra le particelle, che tendono a stare nello stesso stato più di quello che ci aspetteremmo classicamente([5]). Le particelle che quantisticamente godono di questa statistica (di Bose-Einstein) sono dette bosoni.

Tuttavia ci sono altre particelle, quelle che chiamiamo fermioni, che soddisfano il principio di esclusione di Pauli: non più di un fermione può occupare lo stesso stato quantico; sono proibite occupazioni multiple dello stesso stato. Il principio di esclusione è alla base della quasi-incompressibilità della materia solida; inoltre implica che elettroni rotanti intorno ad un atomo pesante non si dispongono tutti nelle orbite più interne, ma incominciano a popolare le orbite più esterne e da questo effetto nasce la chimica.

Se le nostre particelle sono fermioni, nel caso di due particelle in due stati quantici, l'unica possibilità consiste nel mettere le due particelle in stati quantici diversi e abbiamo

$$P_{AB} = 1 \; . \tag{5}$$

Ovviamente le cose si complicano se abbiamo un maggior numero di particelle e di stati quantici. In questo caso abbiamo delle formule un poco più complicate; tuttavia nel caso di fermioni ogni stato quantico può essere o occupato da una sola particella o rimanere libero.

Avendo chiarito che cosa sia una statistica quantistica, cerchiamo di inquadrare i lavori fondamentali in cui è stato introdotto questo concetto nel loro contesto storico.

All'inizio degli anni venti la situazione della teoria quantistica era confusa. Era assodata la teoria di Planck per la radiazione di corpo nero, secondo la quale ogni modo normale del campo elettrico-magnetico può avere energie solo multiple di $\hbar\omega$. La teoria di Planck era stata generalizzata e si potevano calcolare i livelli energetici di sistemi quantistici il cui moto classico fosse periodico o quasi-periodico utilizzando la formula di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld. Il caso di un moto classico generico sfuggiva alla quantizzazione. Nel caso di un potenziale generico era quindi impossibile trovare i livelli energetici del sistema e più in generale calcolare le proprietà statistiche. Uno dei pochi casi per cui era possibile fare i calcoli era costituito dalle vibrazioni termiche di un solido; era quindi possibile ricavare teoricamente il calore specifico di un solido, che come è noto è costante ad alte temperature, ma devia verso zero a bassa temperatura, a causa di effetti quantistici. Questo risultato è fondamentale ed è alla base della terza legge della termodinamica([6]).

Il caso del gas perfetto, invece, sfuggiva ad ogni analisi; il calore specifico era quello della meccanica classica, ovvero indipendente dalla temperatura. Questo risultato era estremamente imbarazzante in quanto in disaccordo con la terza legge della termodina-

---

([5]) Questa *attrazione* è alla base di molti importanti fenomeni quantistici, tra cui l'effetto laser, la superconduttività e la superfluidità.

([6]) In prima approssimazione la terza legge della termodinamica afferma che l'entropia a temperatura zero è finita. Questa legge, in una versione lievemente diversa, fu proposta come congettura da Nernst verso il '10. Per motivi strani questa congettura (che si può dimostrare usando la meccanica quantistica) passa alla storia come il teorema di Nernst.

mica che impone che il calore specifico si annulla a temperatura zero. Non si riusciva a progredire: mancava l'idea fondamentale necessaria per porre rimedio a questa situazione e fino al '24 la situazione rimase bloccata. A questo proposito Einstein nel '12 scrive "Si tratta di una ricerca a tentoni priva di basi precise. Più la teoria dei quanti ha successo, meno seria appare. Come riderebbero i non addetti ai lavori se fossero in grado di seguire lo strano corso di questi sviluppi concettuali."

Tutto cambiò con l'articolo di Bose del '24. Secondo i manuali, Bose intuì che a causa dell'indistinguibilità delle particelle la statistica di Boltzmann non era più valida e doveva essere sostituita da una statistica differente. In realtà Bose probabilmente non intuì quasi nulla per quanto riguarda la statistica. Vediamo in dettaglio l'articolo di Bose.

La proposta di Bose consisteva nel dividere lo spazio delle fasi (posizione e impulso) in celle di volume h^3 (h è la costante di Planck). Successivamente descriveva lo stato del sistema indicando quante celle contenevano un dato numero (k) di particelle. Al variare di k questa quantità era indicata con n_k. Per esempio, nel caso di due particelle in due bicchieri possiamo avere:

(a) $n_1 = 2$ e tutti gli altri n uguali a zero: in questo caso le due particelle sono in bicchieri differenti: il numero di bicchieri che contiene una particella è 2.

(b) $n_0 = 1$ e $n_2 = 1$ e tutti gli altri uguali a zero: in questo caso le due particelle sono nello stesso bicchiere: il numero di bicchieri che contiene nessuna particella è 1 e il numero di bicchieri che contiene due particelle è 1.

Bose propose che la probabilità di avere una sequenza di dati valori di n fosse data da

$$\frac{C}{n_0!n_1!n_2!\dots}\,, \tag{6}$$

dove C è una quantità opportuna tale da rendere la probabilità totale uguale a 1.

Se ci ricordiamo che $0! = 1$, vediamo che per il primo caso (a) la probabilità è $C/2! = C/2$ mentre nel secondo caso (b) la probabilità è $C/(1!)^2 = C$. Dato che la somma delle due probabilità deve essere 1, abbiamo che $C = 2/3$ e facendo un semplice conto ritroviamo i risultati precedenti della statistica di Bose-Einstein (eq. (3)).

La novità rivoluzionaria dell'articolo sta nella formula (6), che costituisce una radicale rottura con la statistica classica. Tuttavia Bose non spende una parola per giustificarla in quanto la ritiene "evidente". Molto probabilmente, come suggerisce Pais, Bose aveva scritto la formula per analogia con quella della probabilità classica (vedi eq. (2)) per il numero di particelle sotto i bicchieri, senza rendersi conto che le leggi della probabilità classica non implicavano affatto la sua formula (6). In termini più crudi Bose era stato superficiale, aveva scritto una formula che gli sembrava evidente senza rifletterci sopra e si era inconsapevolmente sbagliato (errore fecondo come quello di Colombo).

Lui stesso successivamente scrisse "Non mi rendevo conto di aver fatto qualcosa di veramente nuovo. [...] Non ero abbastanza esperto di statistica per capire che stavo facendo qualcosa di molto diverso da ciò che avrebbe fatto Boltzmann, dalla statistica di Boltzmann".

La proposta era rivoluzionaria e per motivi incomprensibili dava il risultato giusto per la radiazione di corpo nero. L'articolo fu respinto dal "Philosophical Magazine", che probabilmente si comportò come i saggi di Salamanca (sarebbe interessante saperne le motivazioni). Per far pubblicare il suo articolo Bose si rivolse alla sua regina Isabella, ovvero ad Einstein, scrivendogli una lettera nel giugno del '24. Einstein subito comprese la portata dell'articolo di Bose, lo tradusse personalmente dall'inglese in tedesco per farlo pubblicare su una rivista tedesca e scrisse immediatamente un secondo articolo da cui traeva ulteriori conseguenze dalla proposta di Bose e applicava la formula di Bose al caso del gas monoatomico.

Che ruolo gioca Fermi in questa storia? All'inizio essenzialmente quello dell'osservatore. Fermi è interessato alla problematica, scrive vari articoli di statistica quantistica, per esempio: *Sopra la teoria di Stern della costante assoluta dell'entropia in un gas perfetto monoatomico* (1923), *Sulla probabilità degli stati quantici* (1923), *Considerazioni sulla quantizzazione dei sistemi che contengono degli elementi identici* (1924), *Sull'equilibrio termico di ionizzazione* (1924), *Sopra la teoria dei corpi solidi* (1925), articoli interessanti che contengono osservazioni intelligenti ma niente di straordinariamente nuovo.

Il contributo fondamentale di Fermi arriva subito dopo l'introduzione del principio di esclusione di Pauli nel '25. Fermi si rende conto istantaneamente delle profonde conseguenze del principio di esclusione di Pauli sulla meccanica statistica e scrive molto velocemente due articoli. L'articolo lungo in tedesco *Zur Quantelung Des Idealen Einatomigen Gas* è preceduto da un articolo più corto in italiano, con lo stesso titolo (*Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*) pubblicato sui rendiconti dell'Accademia dei Licei, presentato in Accademia nel Febbraio del '26([7]).

L'articolo in italiano è molto breve, 5 pagine. Fermi considera un gas monoatomico in presenza di un potenziale armonico([8]), calcola correttamente i livelli quantistici e imponendo che ogni livello non possa essere occupato da più di un atomo, ottiene le varie proprietà termodinamiche del gas perfetto. Ad alte temperature ritrova i risultati classici, mentre scopre che a basse temperature il calore specifico non è più costante, ma va a zero proporzionalmente con la temperatura. L'entropia a temperatura zero è zero, mentre ad alte temperature l'entropia è uguale, con grande soddisfazione di Fermi, a quella ipotizzata da Tetrode e Stern, che avevano usato un argomento euristico. L'articolo tedesco contiene maggiori dettagli, ma tutte le idee nuove sono nell'articolo in italiano.

La velocità impressionante di Fermi a tirare le conseguenze dell'articolo di Pauli è dovuta, secondo Pontecorvo, al fatto che "Fermi già da tempo accarezzava l'idea di questo lavoro: gli mancava però il principio di Pauli. Appena quest'ultimo venne formulato,

---

([7]) Fermi molto spesso pubblicava i suoi lavori velocemente in forma abbreviata in italiano per avere la priorità e successivamente ne scriveva la versione estesa in tedesco o in inglese.

([8]) Fermi avrebbe potuto tranquillamente mettere il gas in una scatola cubica, come aveva fatto nel passato, ma l'uso di un potenziale armonico presenta un vantaggio tecnico in quanto nella zona dove il potenziale è elevato, la densità è bassa e quindi il comportamento è simile a quello classico. Questa sottigliezza permette di arrivare al risultato voluto in maniera estremamente semplice.

mandò in stampa il suo articolo. A questo proposito c'è da dire che Fermi era piuttosto amareggiato per non essere da solo riuscito a formulare il principio di Pauli, principio al quale —come risulta dai suoi lavori— era arrivato molto vicino."

In ogni caso l'articolo di Fermi presenta una versione definitiva della statistica di Fermi nell'ambito della meccanica quantistica prima maniera. È interessante notare che Fermi supponeva che tutti gli atomi soddisfacessero il principio di esclusione di Pauli, mentre attualmente sappiamo che questo succede solo a quelli composti da un numero dispari di fermioni (quelli composti da un numero pari di fermioni sono dei bosoni). Fermi, che non poteva supporre tutto ciò, applica erroneamente la sua statistica all'atomo d'elio che, essendo composto da sei fermioni, è un bosone.

Nella seconda metà del '26 nell'ambito della teoria quantistica vecchia maniera (quella di Planck, Bohr, Sommerfeld) il problema della statistica quantistica era molto poco chiaro: da un lato c'era una proposta strampalata (quella di Bose) per valutare i pesi statistici([9]), che, secondo Einstein, rifletteva "una ben definita ipotesi di influenza tra le molecole, [. . .] influenza di natura affatto misteriosa"; dall'altro c'era una proposta chiarissima, quella di Fermi che discendeva in maniera cristallina dal principio di esclusione di Pauli. Perché bisognasse usare la prima per i fotoni e la seconda per gli elettroni era al di là di ogni possibile comprensione. Inoltre non era affatto evidente il legame tra le due proposte.

La soluzione del problema e la formulazione definitiva delle statistiche quantistiche nell'ambito della nuova teoria quantistica ondulatoria arrivano nell'agosto del '26 con un lavoro di Dirac (in cui Dirac giunge indipendentemente da Fermi a formulare la statistica delle particelle che soddifano il principio di Pauli).

Nella nuova meccanica quantistica un sistema composto da una particella era rappresentato da una funzione d'onda di una variabile $\psi(x)$ mentre un sistema composto da due particelle era rappresentato da una funzione d'onda di due variabili $\psi(x,y)$. Dirac nota che se si considerano come ammissibili solo le funzioni d'onda simmetriche ($\psi(x,y) = \psi(y,x)$) le particelle soddisfano la statistica di Bose-Einstein, mentre al contrario se si considerano come ammissibili solo le funzioni d'onda antisimmetriche ($\psi(x,y) = -\psi(y,x)$) si ottiene il principio di esclusione di Pauli e la conseguente statistica di Fermi. Inoltre la statistica di Bose, se riformulata in termini di numeri di occupazione di ogni stato quantistico, implicava una formula molto semplice (quella descritta dall'equazione (4)).

La teoria delle statistiche quantistiche era fatta, e Fermi ne fu giustamente considerato uno degli autori principali. Come esempio della notorietà di Fermi possiamo citare una lettera di Einstein a Lorentz, in cui Einstein declina l'invito a parlare della statistica quantistica al congresso Solvay del '27, in quanto non sufficientemente competente e suggerisce che "forse il signor Fermi di Bologna([10]) [. . .] o Langevin [. . .] potrebbero

([9]) Einstein scriveva "la sua deduzione è elegante, ma la sostanza resta oscura".
([10]) Fermi non ha mai lavorato a Bologna; i due articoli sulla statistica erano stati fatti da Fermi mentre era professore incaricato a Firenze.

assolvere bene questo compito".

Subito dopo gli articoli originali partirono le applicazioni: la prima fu un trattamento statistico degli elettroni più interni di un atomo pesante con molti elettroni, articoli di Thomas (fine del '26) e di Fermi (fine del '27), da cui nasce la teoria di Thomas-Fermi, che permette di calcolare in maniera quantitativa le varie proprietà degli atomi pesanti (per esempio il raggio) come funzione del numero atomico. Successivamente venne costruita la teoria dei metalli: qui gli elettroni formano un gas di fermioni quasi perfetto ad alta densità (a temperatura quasi zero) dove gli effetti quantistici sono dominanti.

Già nel '27 Pauli usa la statistica di Fermi per spiegare il paramagnetismo dei metalli alcalini e Sommerfeld incomincia uno studio sistematico dei metalli a partire dal contributo degli elettroni al calore specifico (proporzionale alla temperatura).

Fermi non si interessa direttamente di queste applicazioni della sua teoria, sulle quali lavoreranno generazioni di fisici, ma rivolge piuttosto i suoi interessi verso quella che era in quel momento la nuova frontiera della fisica teorica: l'elettrodinamica quantistica, con tutti i problemi connessi all'emissione e all'assorbimento dei fotoni e scrive una serie di magistrali lavori, ammirati da tutti per l'estrema chiarezza. L'esperienza fatta studiando l'elettrodinamica quantistica, gli sarà estremamente utile nella stesura dell'articolo del '33, *Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi beta* che forse è il contributo più profondo di Fermi alla fisica teorica.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] La raccolta completa degli articoli di Enrico Fermi si trova in *Note e Memorie*, edito dall'Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1961).
[2] Pais A., *Sottile è il Signore* (Boringhieri, Torino) 1986; Pontecorvo B., *Enrico Fermi* (Edizioni Studio Tesi) 1993.

Giorgio Parisi è nato a Roma il 4 agosto 1948. Professore ordinario dal 1981, insegna attualmente Calcolo delle Probabilità all'Università di Roma "La Sapienza". È socio dell'Accademia dei Lincei, dell'Accademia dei XL e dell'Accademia Francese delle Scienze. Ha ricevuto la Medaglia Boltzmann nel 1992 e la Medaglia Dirac nel 1999. Ha scritto più di 400 articoli scientifici.
